MAC0325 OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA: NOTAS DE AULA

MARCEL K. DE CARLI SILVA

TRANSCRITO PELOS ALUNOS:

BRENO HELFSTEIN MOURA
PEDRO SOLA
GUSTAVO MENDES
DOUGLAS DE ARAUJO SMIGLY
HENRIQUE SBARAI
GUSTAVO CAPARICA
VICTOR WICHMANN RAPOSO
DANIEL KAWAI
ARIEL SERRANONI
GUSTAVO CHICATO
RAFAEL ZUOLO
FRANKLIN SANTIAGO
ARTHUR CAMPOS

SUMÁRIO

1. Aula de terça-feira, 7 de agosto	3
2. Aula de quinta-feira, 9 de agosto	4
3. Aula de terça-feira, 14 de agosto	6
4. Aula de quinta-feira, 16 de agosto	8
5. Aula de terça-feira, 21 de agosto	10
6. Aula de quinta-feira, 23 de agosto	11
7. Aula de terça-feira, 28 de agosto	12
8. Aula de quinta-feira, 30 de agosto	13
9. Aula de Terça Feira, 11 de Setembro	14
10. Aula de Terça Feira, 18 de Setembro	16
11. Aula de Quinta Feira, 20 de Setembro	18
12. Aula de Terça Feira, 25 de Setembro	19
13. Aula de Quinta Feira, 27 de Setembro	21
14. Aula de Terça Feira, 2 de Outubro	22
15. Aula de Quinta Feira, 4 de Outubro	23
16. Aula de Terça Feira, 16 de Outubro	24
17. Aula de Quinta Feira, 18 de Outubro	25
18. Aula de Terça Feira, 23 de Outubro	27
19. Aula de Terça Feira, 30 de Outubro	29
20. Aula de Quinta Feira, 1 de novembro	30
21. Aula de Terça Feira, 6 de novembro	31
22. Aula de Quinta Feira, 8 de novembro	32
23. Aula de Quinta Feira, 22 de novembro	33
24. Aula de Terça Feira, 27 de novembro	34
25. Aula de Terça Feira, 04 de Dezembro	35
Apêndice A. Notação	37
Apêndice B. Produtos Notáveis	37
Referências	38

1. AULA DE TERÇA-FEIRA, 7 DE AGOSTO

Um *problema de otimização* é um par ordenado (X, f) em que X é um conjunto, chamado *conjunto viável* ou *região viável*, e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, chamada *função objetivo*. Mais comumente, nos referimos ao problema de otimização (X, f) como o problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in X. \end{array} \quad (\text{OPT})$$

A otimização combinatória trata de problemas no formato (OPT) em que X é finito. Geralmente o conjunto X envolve objetos em grafos e é dado implicitamente, isto é, descrito por um objeto muito menor, de “tamanho” n , sendo que o tamanho de X é pelo menos exponencial de n . A qualidade dos algoritmos que vamos construir será expressa em função de n . A “estrutura combinatória” do problema muitas vezes nos permite resolver problema sem examinar cada elemento de X .

Cada elemento x de X é uma *solução viável* de (OPT) e $f(x)$ é o *valor objetivo* de x . O problema (OPT) é *viável* se $X \neq \emptyset$ e *inviável* caso contrário. O *valor ótimo* de (OPT) é $\inf_{x \in X} f(x) \in [-\infty, +\infty]$. Note que o valor ótimo de um problema é $+\infty$ se, e somente se, o problema é inviável. Se o valor ótimo é $-\infty$, o problema é *ilimitado*. Uma *solução ótima* é uma solução viável cujo valor objetivo é o valor ótimo do problema; equivalentemente, $\bar{x} \in X$ é solução ótima se, e somente se, para todo $x \in X$, vale que $f(\bar{x}) \leq f(x)$.

Um *grafo* é uma tripla ordenada $G = (V, E, \varphi)$, em que $V(G) := V$ é um conjunto finito de *vértices*, $E(G) := E$ é um conjunto finito de *arestas* e $\varphi := E \rightarrow \binom{V}{1} \cup \binom{V}{2}$ é uma *função de incidência*, sendo $\binom{V}{k}$ a coleção de k -subconjuntos de V .

2. AULA DE QUINTA-FEIRA, 9 DE AGOSTO

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo. Os elementos de $\varphi(e)$ são as *pontas* de $e \in E$. A aresta $e \in E$ é um *laço* se $|\varphi(e)| = 1$. Muitas vezes abreviamos $uv := \{u, v\}$. Se arestas distintas $e, f \in E$ não são laços e $\varphi(e) = \varphi(f)$, então e e f são *arestas paralelas*. Se G não tem laços e nem arestas paralelas, então G é *simples*. Se G é simples e se φ é a função identidade, costumamos omitir φ e dizemos que G é o par ordenado (V, E) , com $E \subseteq \binom{V}{2}$. Abreviamos $n := |V|$ e $m := |E|$.

Um *digrafo* é uma tripla ordenada $D = (V, A, \varphi)$, em que V é um conjunto finito de vértices, A é um conjunto finito de *arcos* e $\varphi: A \rightarrow V \times V$ é uma função de incidência. Se u e v são elementos de V , abreviamos $uv := (u, v)$ e se $\varphi(a) = \varphi(b) = (u, v)$ e $u \neq v$, dizemos que a e b são *arcos paralelos*.

Exercício 2.1. Transplante a terminologia vista acima para grafos de forma análoga para digrafos.

Um *passeio* num digrafo $D = (V, A, \varphi)$ é uma sequência $W = \langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k \rangle$ formada alternadamente por vértices e arcos de D tais que $k \geq 0$ e, para todo $i \in [k] := \{1, \dots, k\}$, vale que $\varphi(a_i) = (v_{i-1}, v_i)$. Denotamos $V(W) := \{v_i\}_{i=0}^k$ e $A(W) := \{a_i\}_{i=1}^k$ e dizemos que W tem *comprimento* k . Se $v_0 = v_k$, o passeio é *fechado*. Se W é fechado e $|V(W)| = k$, dizemos que W é um *circuito*. Se $|V(W)| = k + 1$, dizemos que W é um *caminho*. Dizemos que o passeio W *vai de* v_0 *para* v_k .

Exercício 2.2. Novamente, faça as definições análogas para grafos.

Um circuito num grafo $G = (V, E)$ é *hamiltoniano* se tem comprimento $|V|$. O *grafo completo* sobre um conjunto finito V é $K_v := (V, \binom{V}{2})$.

Problema (Problema do Caixeiro Viajante). Dado um conjunto finito V e $w: E(K_v) \rightarrow \mathbb{R}$, encontre uma solução ótima de

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \sum_{e \in E(C)} w(e) && \text{(TSP)} \\ &\text{sujeito a} && C \text{ é circuito hamiltoniano em } K_v. \end{aligned}$$

Um grafo $H = (W, F, \psi)$ é um *subgrafo* de um grafo $G = (V, E, \varphi)$ se $W \subseteq V$, $F \subseteq E$ e $\psi = \varphi|_F$.

Se $F = \{e \in E : \varphi(e) \subseteq W\} =: E[W]$ dizemos que H é o *subgrafo de G induzido por W* , denotado por $G[W]$.

Logo, $G[S] = (S, E[S], \varphi|_{E[S]})$ para todo $S \subseteq V$. Se $W = V$, então H é *subgrafo gerador* de G .

Exercício 2.3. Faça as definições análogas para digrafos.

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo. A relação $\rightsquigarrow_G$ sobre V definida como

$$u \rightsquigarrow_G v \text{ se existe um passeio de } u \text{ para } v \text{ em } G \tag{2.1}$$

é uma relação de equivalência. As classes de equivalência de $\rightsquigarrow_G$ são os *componentes (conexos)* de G .

O grafo G é *conexo* se G tem menos que dois componentes. O grafo G é *acíclico* se G não tem circuitos (ou G é uma floresta). Uma *árvore* é uma floresta conexa. Uma *árvore geradora* de G é um subgrafo gerador de G que é uma árvore.

Problema (Problema da Árvore Geradora de Custo Mínimo). Dados um grafo conexo $G = (V, E, \varphi)$ e uma função “custo” nas arestas $c: E \rightarrow \mathbb{R}$, encontre uma solução ótima para

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \sum_{e \in F} c(e) =: c(F) && \text{(MST)} \\ &\text{sujeito a} && F \subseteq E \text{ e } (V, F, \varphi|_F) \text{ é árvore geradora de } G. \end{aligned}$$

Seja $D = (V, A, \varphi)$ um digrafo e $W = \langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k \rangle$ um passeio em D . Seja $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função “custo”. O *custo* de W é $\ell(W) := \sum_{i=1}^k \ell(a_i)$. Um circuito C em D é (ℓ) -negativo se $\ell(C) < 0$.

3. AULA DE TERÇA-FEIRA, 14 DE AGOSTO

Resolver um problema de otimização significa:

- (i) determinar se ele é inviável, ou
- (ii) determinar se ele é ilimitado, ou
- (iii) determinar o valor ótimo e achar uma solução ótima, se existir.

Problema (Problema do Caminho Mínimo). Dado um digrafo $D = (V, A, \varphi)$, vértices $r, s \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$, resolva o problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \ell(P) \\ \text{sujeito a} & P \text{ é um caminho de } r \text{ a } s \text{ em } D. \end{array} \quad (\text{SPP})$$

(SPP) é NP-difícil. Denote $\text{dist}_{D,\ell}(r,s)$ o valor ótimo de (SPP).

Problema (Problema do Passeio Mínimo). Dados um digrafo $D = (V, A, \varphi)$, vértices $r, s \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$, resolva o problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \ell(W) \\ \text{sujeito a} & W \text{ é um passeio de } r \text{ a } s \text{ em } D. \end{array} \quad (\text{SWP})$$

Definição. Sejam (X, f) e (Y, g) problemas de otimização. Um *homomorfismo* de (X, f) a (Y, g) é uma função $\psi: X \rightarrow Y$ tal que $g(\psi(x)) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Se existe um homomorfismo de (X, f) a (Y, g) , escrevemos $(X, f) \rightarrow (Y, g)$. Os problemas (X, f) e (Y, g) são *equivalentes* se $(X, f) \rightarrow (Y, g)$ e $(Y, g) \rightarrow (X, f)$.

Exercício 3.1. Prove que, se dois problemas de otimização são equivalentes, então ambos têm um desses possíveis resultados: (i) inviável, (ii) ilimitado, (iii) valor ótimo finito com solução ótima ou (iv) valor ótimo finito sem solução ótima.

Vamos definir agora a relação binária $\rightsquigarrow_D$ em V por

$$r \rightsquigarrow_D s \text{ se existe um passeio de } r \text{ para } s \text{ em } D.$$

Exercício 3.2. Prove que tanto o problema (SPP) quanto (SWP) são ambos equivalentes ao problema aplicado no subdigrafo induzido $D[V_{rs}]$ em que $V_{rs} := \{v \in V : r \rightsquigarrow_D v \text{ e } v \rightsquigarrow_D s\}$.

Exercício 3.2 mostra que pouca generalidade é perdida tanto em (SPP) quanto em (SWP) se assumimos que,

$$\text{para cada } v \in V, \text{ temos } r \rightsquigarrow_D v \rightsquigarrow_D s. \quad (\text{R})$$

Também é óbvio como reduzir qualquer instância de ambos os problemas para uma em que o digrafo seja simples.

Exercício 3.3. Sejam $D = (V, A)$ um digrafo, $r, s \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Prove que, se uma determinada solução ótima W^* de (SWP) é um caminho, então W^* é uma solução ótima para (SPP).

Exercício 3.4. Sejam $D = (V, A)$ um digrafo, $r, s \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k \rangle$ é uma solução ótima para (SWP) e $v_i = v_j$ para $i, j \in \{0, \dots, k\}$ tais que $i < j$, então $C := \langle v_i, a_{i+1}, v_{i+1}, \dots, a_j, v_j \rangle$ tem custo $\ell(C) = 0$.

Proposição 3.5. Sejam $D = (V, A)$ um digrafo, $r, s \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Então qualquer solução ótima de (SWP) de comprimento mínimo é um caminho e, logo, uma solução ótima para (SPP).

Demonstração. Seja $W = \langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k \rangle$ uma solução ótima para (SWP) com número de arcos mínimo. Se existem $i, j \in \{0, \dots, k\}$ tais que $v_i = v_j$ e $i < j$, então $W' := \langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_i, v_i, a_{j+1}, v_{j+1}, \dots, a_k, v_k \rangle$ é um passeio de r para s com $\ell(W') = \ell(W) - \ell(C)$ em que $C := \langle v_i, a_{i+1}, v_{i+1}, \dots, a_j, v_j \rangle$. Logo, pelo Exercício 3.4, segue que $\ell(W') = \ell(W)$. Logo, W' também é uma solução ótima e tem menos arcos. Isso contradiz a escolha de W . Portanto, W é um caminho e o resultado sai diretamente do Exercício 3.3. $\square$

Seja $D = (V, A, \varphi)$ um digrafo. Defina:

$$\begin{aligned} \delta^{\text{out}}(S) &:= \{a \in A : \varphi(a) = uv, u \in S, v \notin S\} & \forall S \subseteq V, \\ \delta^{\text{in}}(S) &:= \delta_D^{\text{out}}(V \setminus S) & \forall S \subseteq V. \end{aligned}$$

Teorema 3.6. Sejam $D = (V, A)$ um digrafo e $r, s \in V$. Então $r \not\rightsquigarrow_D s \iff$ existe $R \subseteq V$ tal que $r \in R$, $s \notin R$ e $\delta_D^{\text{out}}(R) = \emptyset$.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Trivial.

($\Rightarrow$) Defina $R := \{v \in V : r \rightsquigarrow_D v\}$. Note que $r \in R$ e $s \notin R$. Se $\delta_D^{\text{out}}(R) \neq \emptyset$, então existe $e \in \delta_D^{\text{out}}(R)$. Assim, existe $u \in R$ tal que $\varphi(e) = uv$. Dessa forma, se $W = \langle r, a_1, v_1, \dots, a_k, u \rangle$ é um caminho de r a u , então $\langle r, a_1, v_1, \dots, a_k, u, e, v \rangle$ é um caminho de r a v . Contradição. $\square$

Teorema 3.7. Sejam $D = (V, A)$ um digrafo, $r, s \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que (R) vale. Então (SWP) é ilimitado se e somente se D tem um circuito negativo.

4. AULA DE QUINTA-FEIRA, 16 DE AGOSTO

Teorema 4.1. Sejam $D = (V, A)$ um digrafo, $r, s \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que vale (R). Então

$$\text{(SWP)} \text{ é ilimitado} \iff D \text{ tem um circuito negativo.} \quad (4.1)$$

Esboço de prova. ($\Leftarrow$) Seja C um circuito negativo em D . Seja $v \in V(C)$. Por (R), existem passeios W_1 de r até v e W_2 de v até s . Se “concatenarmos” W_1 com $k \in \mathbb{N}$ “cópias” de C , seguidas de W_2 , obtemos um passeio de r a s com custo $\ell(W_1) + k\ell(C) + \ell(W_2) \rightarrow -\infty$ (se $k \rightarrow \infty$). (Ex: faça a prova acima usando só uma cópia de C).

($\Rightarrow$) Suponha que D não tem circuito negativo. Se W é um passeio de r a s em D , existe um caminho P de r a s em D com $\ell(P) \leq \ell(W)$ [remova circuitos do passeio até que não sobre nenhum]. Logo, existe um homomorfismo de (SWP) para (SPP), que é limitado. $\square$

Exercício 4.2. Sejam $D = (V, A)$ um digrafo, $r, s \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que vale (R). Prove que, se o valor ótimo de (SWP) é finito, então existe uma solução ótima.

Sejam $D = (V, A)$ um digrafo, $r \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $t \in \mathbb{N}$, defina $y_t: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como

$$y_0(v) := \begin{cases} 0 & \text{se } v = r, \\ +\infty & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.2)$$

e

$$y_{t+1}(v) := \min(\{y_t(v)\} \cup \{y_t(u) + \ell(uv) : uv \in A\}) \quad \forall t \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Para cada $t \in \mathbb{N}$ e $v \in V$, sejam

$$W_0(v) := \begin{cases} \langle r \rangle & \text{se } v = r, \\ \perp & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.4)$$

e

$$W_{t+1}(v) := \begin{cases} \langle z_0, \dots, a_k, z_k, uv, v \rangle & \text{se } y_t(u) + \ell(uv) = y_{t+1}(v) < y_t(v) \text{ e } W_t(u) = \langle z_0, \dots, a_k, z_k \rangle, \\ W_t(v) & \text{se } y_{t+1}(v) = y_t(v) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Note que y_t está definido inambiguamente para todo $t \in \mathbb{N}$, enquanto os passeios $W_t(v)$ não são definidos de forma única. Uma possibilidade para que esses passeios estejam unicamente definidos é criar uma ordem total arbitrária $\leq$ sobre V e, em caso de vários arcos uv tais que $y_{t+1}(v) = y_t(u) + \ell(uv)$, podemos sempre escolher o elemento u mínimo na ordem $\leq$.

Exercício 4.3. Sejam $D = (V, A)$ um digrafo, $r \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Prove que, para cada $t \in \mathbb{N}$ e cada $s \in V$, o valor ótimo do problema de otimização

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \ell(P) \\ &\text{sujeito a} && P \text{ é um passeio de } r \text{ a } s \text{ em } D \text{ de comprimento } \leq t \end{aligned} \quad (\text{SWP}_t)$$

é $y_t(s)$ e $W_t(s)$ é uma solução ótima se $y_t(s) < \infty$.

É fácil verificar que y_t pode ser computada em tempo polinomial em $n = |V|$ e t . Um jeito esperto de fazer isso computacionalmente usa programação dinâmica e não é difícil recuperar os passeios ótimos das relações de recorrência em (4.2) e (4.3). Suponha que vale (R). Pelo Theorem 4.1, Exercício 4.2 e Proposition 3.5, se D não tem circuitos negativos, então $y_{n-1} = \text{dist}_{(G, \ell)}(r, \cdot)$. Como podemos detectar/certificar se D tem circuitos negativos e certificar que os passeios que encontramos são ótimos?

Sejam $D = (V, A)$ um digrafo e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Temporariamente, vamos chamar de *potencial* qualquer função $y: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Um potencial é *viável* (com relação a ℓ) se

$$y(v) \leq y(u) + \ell(uv) \quad \forall uv \in A.$$

Se y é um potencial viável, $r, s \in V$ e $y(r) < \infty$, então $r \rightsquigarrow_D s \implies y_s < \infty$. Logo pouca generalidade é perdida quando assumimos que um potencial viável é finito sempre.

Teorema 4.4. Seja $D = (V, A)$ um digrafo, $r, s \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Se $y: V \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial viável, então para qualquer passeio W de r a s em D , vale

$$\ell(W) \geq y(s) - y(r) \quad (4.6)$$

Demonstração. Seja $W = \langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k \rangle$ um passeio de $r = v_0$ a $s = v_k$ em D . Então

$$\ell(W) = \sum_{i=1}^k \ell(a_i) = \sum_{i=1}^k \ell(v_{i-1}v_i) \geq \sum_{i=1}^k [y(v_i) - y(v_{i-1})] = y(v_k) - y(v_0) = y(s) - y(r)$$

pela soma telescópica. $\square$

Corolário 4.5. Seja $D = (V, A)$ um digrafo e seja $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Se existe um potencial viável $y: V \rightarrow \mathbb{R}$ então D não possui circuitos negativos.

Demonstração. Seja C um circuito em D de r a $s = r$. Então $\ell(C) \geq y(s) - y(r) = 0$ pelo Theorem 4.4. $\square$

Corolário 4.6. Seja $D = (V, A)$ um digrafo com n vértices, $r \in V$, e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que, para cada $v \in V$, temos $r \rightsquigarrow_D v$. Se D não possui circuitos negativos, então $y_{n-1} = \text{dist}_{(G, \ell)}(r, \cdot)$ é um potencial viável.

Demonstração. Isto é um resumo do que foi discutido acima. Escreva a prova completa como exercício. $\square$

A respeito das funções y_t definidas em (4.2) e (4.3), é fácil de verificar que $y_t = y_{t+1} \iff y_t$ é um potencial viável. Logo, para detectar se D possui um circuito negativo, é suficiente verificar se $y_{n-1} = y_n$, pelo Corollary 4.6. Para de fato encontrar um circuito negativo, suponha que $y_n \neq y_{n-1}$. Já que $y_n \leq y_{n-1}$, existe $v \in V$ tal que $y_n(v) < y_{n-1}(v)$. Pelo Exercício 4.2, existe um passeio W de r a v em D de comprimento exatamente n e custo $\ell(W) < \text{dist}_{(G, \ell)}(r, v)$. Portanto, W deve “conter” um circuito negativo.

5. AULA DE TERÇA-FEIRA, 21 DE AGOSTO

Teorema 5.1 (O algoritmo de Bellman-Ford). Sejam $D = (V, A)$ um digrafo, $r, s \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}$. Defina y_t para cada $t \in \mathbb{N}$ como em (4.2) e (4.3) e defina $W_t(v)$ para cada $t \in \mathbb{N}$ e $v \in V$ como em (4.4) e (4.5). Defina $R := \{v \in V : r \rightsquigarrow_D v\}$ e $S := \{v \in V : v \rightsquigarrow_D s\}$. Defina $y^* := y_{n-1} \upharpoonright_{R \cap S}$, onde $n := |V|$. Então vale precisamente uma das afirmações abaixo:

- (i) O problema (SWP) é inviável e $R = \{v \in V : y_v^* < \infty\}$ satisfaz $r \in R$, $s \notin R$ e $\delta^{\text{out}}(R) = \emptyset$.
- (ii) O problema (SWP) é ilimitado e existe $v \in R \cap S$ tal que o passeio $W_n(v) = \langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n \rangle$ tem comprimento n e, para quaisquer $i, j \in \{0, \dots, n\}$ com $i < j$ e $v_i = v_j$, o passeio $W_{ij} := \langle v_i, \dots, v_j \rangle$ satisfaz $\ell(W_{ij}) < 0$.
- (iii) O problema (SWP) tem valor ótimo $y_s^* - y_r^*$, o caminho $P^* := W_{n-1}(s)$ é uma solução ótima para (SWP) e (SPP), e $y^*: R \cap S \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial viável em $D[R \cap S]$. Se W é passeio de r a s em D , então W está em $D[R \cap S]$ e, portanto, $\ell(W) \geq y_s^* - y_r^* = \ell(P^*)$.

Demonstração. Novamente este é um resumo do que foi discutido acima. Escreva a prova completa como exercício. $\square$

Exercício 5.2 (O algoritmo de Dijkstra). Sejam $D = (V, A)$ um digrafo, $r \in V$ e $\ell: A \rightarrow \mathbb{R}_+$. Suponha que, para todo $v \in V$, vale que $r \rightsquigarrow_D v$. Defina $y_0: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como em (4.2) e $V_0 := \emptyset$. Para cada $t \in \mathbb{N}$, defina

$$U_t := \arg \min \{y_t(v) : v \in V \setminus V_t\},$$

$$V_{t+1} := V_t \cup U_t,$$

$$y_{t+1}(v) := \begin{cases} y_t(v) & \text{se } v \in V_{t+1}, \\ \min(\{y_t(v)\} \cup \{y_t(u) + \ell(uv) : uv \in A, u \in U_t\}) & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \forall v \in V.$$

Prove que, para cada $t \in \mathbb{N}$, o potencial $y_t \upharpoonright_{V_{t+1}}$ é viável no digrafo $D[V_{t+1}]$.

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo. Para cada $M \subseteq E$, denote $V_M := \bigcup_{e \in M} \varphi(e)$. Dizemos que $M \subseteq E$ é um *emparelhamento* se $|V_M| = 2|M|$. Note que M é um emparelhamento se, e somente se, M não possui laços e, para quaisquer $e, f \in M$ distintos, vale que $\varphi(e) \cap \varphi(f) = \emptyset$. Neste caso, os vértices de V_M são *saturados* ou *cobertos* por M . O emparelhamento M é *perfeito* se $V_M = V$.

Problema (Problema do Emparelhamento de Peso Máximo). Dado um grafo $G = (V, E, \varphi)$ e $w: E \rightarrow \mathbb{R}$, resolva o problema de otimização

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && w(M) \\ &\text{sujeito a} && M \text{ é um emparelhamento em } G. \end{aligned} \tag{5.1}$$

O valor ótimo de (5.1) é denotado por $\nu_w(G)$.

Problema (Problema do Emparelhamento Perfeito de Peso Mínimo). Dado um grafo $G = (V, E, \varphi)$ e $w: E \rightarrow \mathbb{R}$, resolva o problema de otimização

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && w(M) \\ &\text{sujeito a} && M \text{ é um emparelhamento perfeito em } G. \end{aligned} \tag{5.2}$$

6. AULA DE QUINTA-FEIRA, 23 DE AGOSTO

Inicialmente, vamos tratar do caso em que $w = \mathbb{1}$. Nesse caso (de cardinalidade), esses problemas se traduzem a: encontrar um emparelhamento máximo e decidir se o grafo tem algum emparelhamento perfeito. Abrevie $\nu := \nu_{\mathbb{1}}$. Um emparelhamento M em G é *máximo* se $|M| = \nu(G)$.

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo, $M \subseteq E$ um emparelhamento e $P = \langle v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k \rangle$ um caminho em G . O caminho P é *M -alternante* se, para todo $i \in [k-1]$, vale que

$$e_i \in M \iff e_{i+1} \notin M.$$

Se P é M -alternante, então $V(P) \setminus \{v_0, v_k\} \subseteq V_M$; se $v_0, v_k \notin V_M$, dizemos que P é *M -aumentador*.

Exercício 6.1. Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo, $M \subseteq E$ um emparelhamento, $P = \langle v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k \rangle$ um caminho M -alternante de r a s em G . Suponha que

$$v_0 \in V_M \implies e_1 \in M \text{ e } v_k \in V_M \implies e_k \in M.$$

Prove que $N := M \Delta E(P)$ é um emparelhamento e que $V_N = V_M \Delta \{r, s\}$. Em particular, se P é M -aumentador, então M não é máximo.

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo sem laços. Defina

$$\delta_G(S) := \{e \in E : \varphi(e) \cap S \neq \emptyset, \varphi(e) \cap \bar{S} \neq \emptyset\} \quad \forall S \subseteq V$$

o corte de G com *margem* S , em que $\bar{S} := V \setminus S$. Note que, para todo $S \subseteq V$, vale $\delta_G(S) = \delta_G(\bar{S})$.

Abrevie

$$\begin{aligned} \delta_G(v) &:= \delta_G(\{v\}) & \forall v \in V, \\ \deg_G(v) &:= |\delta_G(v)| & \forall v \in V. \end{aligned}$$

Denote $\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg_G(v)$.

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo. Dizemos que G é um *caminho* se existe um caminho P em G tal que $G = (V(P), E(P), \varphi|_{E(P)})$. Dizemos que G é um *circuito* se existe um circuito C em G tal que $G = (V(C), E(C), \varphi|_{E(C)})$.

Exercício 6.2. Mostre que se G é um grafo com pelo menos um vértice e $\Delta(G) \leq 2$, então para cada componente K de G , vale que $G[K]$ é um caminho ou um circuito.

Teorema 6.3 (Teorema de Berge). Sejam $G = (V, E, \varphi)$ um grafo e $M \subseteq E$ um emparelhamento. Então M é máximo $\iff$ não existe caminho M -aumentador em G .

Demonstração. ($\implies$) Segue imediatamente do Exercício 6.1.

[conversa de ($\impliedby$)] Seja N um emparelhamento tal que $|N| > |M|$. Se K é um componente de $H := (V, M \Delta N, \varphi|_{M \Delta N})$, então $H[K]$ é caminho ou circuito, pelo Exercício 6.2. Se $H[K]$ é circuito, então $|M \cap E[K]| = |N \cap E[K]|$. Como $|M| < |N|$, há pelo menos um componente K de H em que $H[K]$ é um caminho tal que $N' := N \cap E[K]$ tem mais arestas que $M' := M \cap E[K]$. Seja $P = \langle v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k \rangle$ um caminho em $H[K]$ tal que $V(P) = K$. Então P é M -alternante e $v_0, v_k \notin V_M$; caso contrário teríamos $|M'| \geq |N'|$. Logo, P é M -aumentador. $\square$

Note que o Theorem 6.3 não fornece um certificado de que M é máximo.

Seja $D = (V, A, \varphi)$ um digrafo. O *grafo subjacente* a D é o grafo (V, A, ψ) , em que

$$\psi(a) := \begin{cases} vv & \text{se } \varphi(a) = vv, \\ uv & \text{se } \varphi(a) = uv. \end{cases}$$

Um digrafo D é uma *orientação* de um grafo G se G é o grafo subjacente a D .

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo. Dizemos que $S \subseteq V$ é *estável* se $G[S]$ não tem arestas. Se $U, W \subseteq V$ são disjuntos e estáveis em G , e vale que $U \cup W = V$, dizemos que G é (U, W) -*bipartido*.

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo (U, W) -bipartido. Seja $M \subseteq E$ um emparelhamento e tome $\bar{M} := E \setminus M$. Defina a orientação $D_M := (V, E, \psi_M)$ de G , em que

$$\psi_M(e) := \begin{cases} uw & \text{se } e \in \bar{M} \text{ e } \varphi(e) = uw \text{ com } u \in U \text{ e } w \in W, \\ wu & \text{se } e \in M \text{ e } \varphi(e) = uw \text{ com } u \in U \text{ e } w \in W, \end{cases} \quad \forall e \in E. \quad (6.1)$$

Exercício 6.4. Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo (U, W) -bipartido. Seja $M \subseteq E$ um emparelhamento. Seja P um caminho em G com início em $u \in U$. Prove que P é M -aumentador $\iff P$ é um caminho em D_M que vai de um vértice de $U \setminus V_M$ a um vértice de $W \setminus V_M$.

7. AULA DE TERÇA-FEIRA, 28 DE AGOSTO

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo. Dizemos que $K \subseteq V$ é uma *cobertura por vértices* se $G - K := G[V \setminus K]$ não tem arestas.

Proposição 7.1. Sejam $G = (V, E, \varphi)$ um grafo, $M \subseteq E$ um emparelhamento e $K \subseteq V$ uma cobertura por vértices. Então $|M| \leq |K|$.

Demonstração. Defina uma função $f_m: M \rightarrow K$ da seguinte forma. Para cada $e \in M$, se $\varphi(e) = uv$, então $u \in K$ ou $v \in K$. Caso contrário, $e \in E(G - K) = \emptyset$. Escolha $f_m(e)$ como u ou v de modo que $f_m(e) \in K$. Como $\{\varphi(e) : e \in M\}$ é 2-a-2 disjunto, f_m é injetora. $\square$

Teorema 7.2. Sejam $G = (V, E, \varphi)$ um grafo (U, W) -bipartido e $M \subseteq E$ um emparelhamento. Seja $D := D_M = (V, E, \psi)$ a orientação de G definida em (6.1). Defina $R := \{v \in V : \text{existe } u \in U \setminus V_M \text{ tal que } u \rightsquigarrow_D v\}$. Então vale exatamente uma das afirmações abaixo:

- (i) $R \cap (W \setminus V_m) \neq \emptyset$ e, para qualquer $w \in R \cap (W \setminus V_m)$ e qualquer caminho P em D que vai de algum vértice u de $U \setminus V_m$ até w , P é M -aumentador.
- (ii) $R \cap (W \setminus V_m) = \emptyset$ e $K := (U \setminus R) \cup (W \cap R)$ é uma cobertura por vértices com $|K| \leq |M|$.

Demonstração. Se $R \cap (W \setminus V_M) \neq \emptyset$, o restante de (i) segue do Exercício 6.4. Suponha que $R \cap (W \setminus V_M) = \emptyset$. Vamos provar que

$$K := (U \setminus R) \cup (W \cap R) \text{ é uma cobertura por vértices.} \quad (7.1)$$

Suponha que $G - K$ tem alguma aresta e com pontas $u \in U$ e $w \in W$. Então $u \in U \cap R$ e $w \in W \setminus R$. Claramente $\delta^{\text{out}}(R) = \emptyset$ e então $\psi(e) = wu$. Como $u \in R$, existe um caminho $P = \langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k \rangle$ em D com $v_0 \in U \setminus V_M$, $k \geq 1$ e $v_k = u$. Mas $\delta^{\text{in}}(u) = \{e\}$, e portanto $v_{k-1} = w$ e então $w \in R$, uma contradição. Isso conclui a prova de (7.1).

Para provar que $|K| \leq |M|$, vamos construir uma injeção $\pi: K \rightarrow M$. Seja $u \in U \setminus R$. Como $U \setminus V_M \subseteq R$, temos $u \in V_M$ e portanto existem $e \in M$ e $w \in W$ tais que $\varphi(e) = uw$. Tome $\pi(u) := e$. Note que $w \in W \setminus R$, pois caso contrário $w \in W \cap R$ e portanto $e \in \delta^{\text{out}}(R) = \emptyset$. Logo,

$$\forall v \in U \setminus R, \quad \varphi(\pi(v)) \subseteq V \setminus R. \quad (7.2)$$

Seja $w \in W \cap R$. Como $R \cap (W \setminus V_M) = \emptyset$, temos $w \in V_M$. Portanto existem $e \in M$ e $u \in U$ tais que $\varphi(e) = uw$. Tome $\pi(w) := e$. Note que $u \in U \cap R$, pois $\psi(e) = wu$ e $w \in R$. Logo,

$$\forall v \in W \cap R, \quad \varphi(\pi(v)) \subseteq R. \quad (7.3)$$

Como G é bipartido, é evidente que $\pi|_{U \setminus R}$ e $\pi|_{W \cap R}$ são injetoras. Combinando esta afirmação com (7.2) e (7.3), segue que π é injetora. $\square$

Corolário 7.3 (Teorema de emparelhamento de König). Seja G um grafo (U, W) -bipartido. Então

$$\max\{|M| : M \subseteq E \text{ um emparelhamento em } G\} = \min\{|K| : K \subseteq V \text{ é cobertura por vértices em } G\}. \quad (7.4)$$

Demonstração. Imediata da Proposition 7.1 e Theorem 7.2 $\square$

8. AULA DE QUINTA FEIRA, 30 DE AGOSTO

Seja S um conjunto finito. A *base canônica* do espaço vetorial $\mathbb{R}^S$ é $\{e_i : i \in S\}$, em que $e_i(j) := [i = j]$ para todos $i, j \in S$.

O *vetor de incidência* de $U \subseteq S$ é $\mathbb{1}_U := \sum_{i \in U} e_i \in \mathbb{R}^S$. Denote $\mathbb{1} := \mathbb{1}_S$.

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo. Então $M \subseteq E$ é emparelhamento se e só se $\bar{x} := \mathbb{1}_M$ é viável em

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && \mathbb{1}^\top x \\ & \text{sujeito a} && x(\delta(v)) \leq 1 \quad \forall v \in V \\ & && x \in \mathbb{R}_+^E \end{aligned} \tag{P}$$

Nesse caso, o valor objetivo de $\bar{x}$ é $\mathbb{1}^\top \bar{x} = |M|$.

Para $x, y \in \mathbb{R}^S$, escrevemos $x \geq y$ se, para todo $i \in S$, vale que $x_i \geq y_i$. Então $\geq$ é uma ordem parcial. Definimos $\leq$ analogamente. Se $x \geq y$ e $z \geq 0$, então $x^\top z \geq y^\top z$. Podemos notar facilmente que para $a, b \in \mathbb{R}^S$, se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a^\top b \geq 0$.

A *matriz de incidência* de um grafo $G = (V, E, \varphi)$ sem laços é a matriz $B_G \in \mathbb{R}^{V \times E}$ definida como:

$$B_G(v, e) = [v \in \varphi(e)] \quad \forall (v, e) \in V \times E. \tag{8.1}$$

Utilizando a matriz de incidência, o problema de otimização (P) fica igual a

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && \mathbb{1}^\top x \\ & \text{sujeito a} && B_G x \leq \mathbb{1} \\ & && x \in \mathbb{R}_+^E \end{aligned} \tag{8.2}$$

Seu dual é

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && \mathbb{1}^\top y \\ & \text{sujeito a} && y \geq 0 \\ & && B_G^\top y \geq \mathbb{1} \end{aligned} \tag{8.3}$$

que é igual a

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && \mathbb{1}^\top y \\ & \text{sujeito a} && y \in \mathbb{R}_+^V \\ & && \mathbb{1}_{\varphi(e)}^\top y \geq 1 \quad \forall e \in E \\ & && y_u + y_v \geq 1 \quad \forall uv \in E \end{aligned} \tag{D}$$

Para $K \subseteq V$, o vetor $\bar{y} := \mathbb{1}_K$ é viável em (D) se e só se K é cobertura por vértices em G . Nesse caso, o valor objetivo de $\bar{y}$ é $\mathbb{1}^\top \bar{y} = |K|$.

O teorema de emparelhamento de Kőnig mostra que se G é bipartido, $M \subseteq E$ é um emparelhamento máximo e $K \subseteq V$ é uma cobertura por vértices de tamanho mínimo, então $\mathbb{1}_M$ e $\mathbb{1}_K$ são soluções ótimas de (P) e (D), respectivamente. Em particular, (P) e (D) possuem soluções ótimas integrais (um vetor é dito *integral* se e só se todas as suas coordenadas são inteiros).

Paradigma fundamental da otimização combinatória

Dado um problema P de otimização combinatória, formule um programa linear $\text{Max}\{c^\top x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ tal que as soluções viáveis de P “correspondam” a algumas soluções viáveis do programa linear (por exemplo, via vetores de incidência). Depois monte o dual do programa linear e investigue sua relação com P (por exemplo, via soluções integrais).

Exemplo:

$$\begin{aligned} & \text{Max}\{c^\top x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}_+^E\} \leq \text{Max}\{c^\top x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}_+^E\} \\ & \leq \text{Min}\{b^\top y : A^\top y \geq c, y \in \mathbb{R}_+^V\} \leq \text{Min}\{b^\top y : A^\top y \geq c, y \in \mathbb{Z}_+^V\} \end{aligned}$$

Estude condições que são necessárias/suficientes para que algumas/todas as desigualdades acima valham com igual.

9. AULA DE TERÇA FEIRA, 11 DE SETEMBRO

Revisão de programação linear.

Um *programa linear* (PL) é uma 6-upla $(A, b, c, \{U_i\}, \{V_j\}, \alpha)$ onde $\{U_i\}_{i \in \{0, \pm 1\}}$ e $\{V_j\}_{j \in \{0, \pm 1\}}$ são famílias de conjuntos finitos e 2-a-2 disjuntos, $\alpha \in \{\pm 1\}$ e, para $U := \cup_{i \in \{0, \pm 1\}} U_i$ e $V := \cup_{j \in \{0, \pm 1\}} V_j$, temos $A \in \mathbb{R}^{U \times V}$, $b \in \mathbb{R}^U$ e $c \in \mathbb{R}^V$ identificado com o seguinte problema de otimização (se $\alpha = -1$)

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && c^\top x \\ & \text{sujeito a} && (Ax)|_{U_+} \geq b|_{U_+} \\ & && (Ax)|_{U_0} = b|_{U_0} \\ & && (Ax)|_{U_-} \leq b|_{U_-} \\ & && x|_{V_+} \in \mathbb{R}_+^{V_+} \\ & && x|_{V_0} \in \mathbb{R}^{V_0} \\ & && x|_{V_-} \in -\mathbb{R}_+^{V_-} \end{aligned}$$

e analogamente para $\alpha = +1$ com Maximizar no lugar de Minimizar e $\geq$ e $\leq$ trocados. Se escrevermos a decomposição em blocos,

$$A = \begin{bmatrix} A_{++} & A_{+0} & A_{+-} \\ A_{0+} & A_{00} & A_{0-} \\ A_{-+} & A_{-0} & A_{--} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_+ \\ b_0 \\ b_- \end{bmatrix}, c^\top = [c_+^\top \quad c_0^\top \quad c_-^\top] \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_+ \\ x_0 \\ x_- \end{bmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}^V \quad (9.1)$$

o problema pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && c^\top x \\ & \text{sujeito a} && A_{++}x_+ + A_{+0}x_0 + A_{+-}x_- \geq b_+ \\ & && A_{0+}x_+ + A_{00}x_0 + A_{0-}x_- = b_0 \\ & && A_{-+}x_+ + A_{-0}x_0 + A_{--}x_- \leq b_- \\ & && x_+ \in \mathbb{R}_+^{V_+}, x_0 \in \mathbb{R}^{V_0}, x_- \in -\mathbb{R}_+^{V_-} \end{aligned} \quad (\text{P})$$

O dual de um PL $(A, b, c, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \alpha)$ é o PL $(A^\top, c, b, \mathcal{V}, \mathcal{U}, -\alpha)$. Logo, o dual de (P) é

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && b^\top y \\ & \text{sujeito a} && A_{++}^\top y_+ + A_{0+}^\top y_0 + A_{-+}^\top y_- \leq c_+ \\ & && A_{+0}^\top y_+ + A_{00}^\top y_0 + A_{-0}^\top y_- = c_0 \\ & && A_{+-}^\top y_+ + A_{0-}^\top y_0 + A_{--}^\top y_- \geq c_- \\ & && y_+ \in \mathbb{R}_+^{U_+}, y_0 \in \mathbb{R}^{U_0}, y_- \in -\mathbb{R}_+^{U_-} \end{aligned} \quad (\text{D})$$

e o dual de (D) é (P).

Teorema 9.1. Sejam $A \in \mathbb{R}^{U \times V}$, $b \in \mathbb{R}^U$, e $c \in \mathbb{R}^V$. Considere os PLs

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && c^\top x \\ & \text{sujeito a} && Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && b^\top y \\ & \text{sujeito a} && A^\top y = c \\ & && y \in \mathbb{R}_+^U \end{aligned} \quad (\text{D})$$

Então:

- (i) se x e y são soluções viáveis de (P) e (D), respectivamente, então $c^\top x \leq b^\top y$, com igualdade se e somente se $y_i(b - Ax)_i = 0 \forall i \in U$
- (ii) os valores ótimos de (P) e (D) são iguais se pelo menos um deles é viável
- (iii) se ambos (P) e (D) são viáveis, ambos possuem soluções ótimas
- (iv) se (P) é ilimitado, $\exists d \in \mathbb{R}^V$ tal que $Ad \leq 0$ e $c^\top d > 0$. $\therefore$ se x é viável em (P), então $x + \mathbb{R}_+ d$ é uma semi-reta de soluções viáveis com valor objetivo ilimitado. Uma afirmação análoga pode ser feita se (D) é ilimitado (Exercício)

Exercício 9.2. Enuncie o Theorem 9.1 para a forma mais geral de Programas Lineares e prove (i).

Corolário 9.3 (Teorema fundamental de Programação Linear). Um Programa Linear é ou inviável, ou tem solução ótima, ou é ilimitado.

Demonstração. Exercício.

□

10. AULA DE TERÇA FEIRA, 18 DE SETEMBRO

Discussão sobre a Prova 1.

Geometria de Programas Lineares

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^V$ (Onde V é um conjunto finito). O segmento de reta entre x e y é:

$$[x, y] := x + [0, 1](y - x) = \{x + \lambda(y - x) : \lambda \in [0, 1]\} = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}$$

Um subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^V$ é convexo se $\forall x, y \in C$ vale que $[x, y] \subseteq C$. Se $\{C_i\}_{i \in I}$ é uma família tal que $C_i \subseteq \mathbb{R}^V$ é convexo $\forall i$, então $\bigcap_{i \in I} C_i$ é convexo. (Exercício!).

Exemplo: um semi-espaco (fechado) é um conjunto da forma $\{x \in \mathbb{R}^V : a^T x \leq \beta\}$ para algum $a \in \mathbb{R}^V \setminus \{0\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Todo semi-espaco é convexo (Exercício!).

Um poliedro é uma intersecção finita de semi-espacos, isto é, um conjunto da forma $\{x \in \mathbb{R}^V : Ax \leq b\}$ para alguma matriz $A \in \mathbb{R}^{U \times V}$ e um vetor $b \in \mathbb{R}^U$. Note que a região viável de qualquer PL é um poliedro.

Seja $\{x_i\}_{i \in I}$ uma família finita de pontos em $\mathbb{R}^V$. Uma combinação linear $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ é uma combinação convexa se os coeficientes $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ satisfazem $\alpha \geq 0$ e $\mathbb{1}\alpha = 1$

Exercício 10.1. Seja $S \subseteq \mathbb{R}^V$ um conjunto finito. Prove que o conjunto de todas as combinações convexas de pontos de S é um conjunto convexo.

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^V$. O fecho convexo (O “Menor” conjunto convexo que contém S) de S , denotado por $\text{conv}(S)$, é a intersecção de todos os subconjuntos convexas de $\mathbb{R}^V$ que contém S .

Exercício 10.2. Seja $S \subseteq \mathbb{R}^V$ finito. Prova que $\text{conv}(S)$ é o conjunto descrito no Exercício 10.1

Um conjunto da forma $\text{conv}(S)$ para algum $S \subseteq \mathbb{R}^V$ finito é um politopo.

Exemplo: Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. O politopo dos emparelhamentos de G é:

$$P_{\text{emp}}(G) := \text{conv}(\mathbb{1}_M : M \subseteq E \text{ emparelhamento de } G) \subseteq \mathbb{R}^E$$

Teorema 10.3. (Minkowski-Stanitz-Wegl) Seja $P \subseteq \mathbb{R}^V$ Então:

$$P \text{ é um politopo} \iff P \text{ é um poliedro limitado}$$

P ser limitado significa $\exists M > 0$ tq $P \subseteq [-M, M]^V$.

Seja $C \subseteq \mathbb{R}^V$ um conjunto convexo. Dizemos que $x \in C$ é um ponto extremo de C se não existem $y, z \in C$ com $|\{x, y, z\}| = 3$ e $x \in [y, z]$

Teorema 10.4. (Versão fraca do teorema de Krein-Milman) Todo politopo é o fecho convexo de seus pontos extremos.

Prova: Exercício! (“Esse é facil!” – Marcel) ■

Teorema 10.5. Sejam $P \subseteq \mathbb{R}^V$ um poliedro e $c \in \mathbb{R}^V$, tal que P é um politopo ou $P \subseteq \mathbb{R}_+^V$ (Essas hipóteses podem ser enfraquecidas)

Se o PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & c^T x \\ \text{s. a} & x \in P \end{array}$$

Possui solução ótima, então existe uma solução ótima que é um ponto extremo de P .

Seja $A \in \mathbb{R}^{U \times V}$ uma matriz. Qualquer matriz da forma $A[S, T] := A|_{S \times T}$ com $S \subseteq U$ e $T \subseteq V$ é uma submatriz de A . Se $S \subseteq U = V$ (Nesse caso a matriz A é quadrada), abreviamos $A[S] = A[S, S]$. Tais submatrizes são chamadas de submatrizes principais de A .

Teorema 10.6. Sejam $A \in \mathbb{R}^{U \times V}$ uma matriz, $b \in \mathbb{R}^U$. Seja $\bar{x} \in P := \{x \in \mathbb{R}^V : Ax \leq b\}$. Então $\bar{x}$ é um ponto extremo de $P \iff \exists S \subseteq U$ tal que $\{\bar{x}\} = \{x \in \mathbb{R}^V : A[S, V]x = b|_S\}$.

11. AULA DE QUINTA FEIRA, 20 DE SETEMBRO

Discussão do Teorema (10.6) da aula passada.

Um poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^V$ é racional se existem $A \in \mathbb{Q}^{U \times V}$ e $b \in \mathbb{Q}^U$ tal que $P = \{x \in \mathbb{R}^V : Ax \leq b\}$.

Exercício 11.1. Seja $P \subseteq \mathbb{R}^V$ um poliedro e $\bar{x} \in P$. Prove que

$$\bar{x} \text{ é um ponto extremo de } P \iff \exists c \in \mathbb{R}^V \text{ tal que } \{\bar{x}\} = \operatorname{argmax}_{x \in P} c^T x$$

Além disso, se P é racional, a afirmação continua verdadeira se exigirmos $c \in \mathbb{Z}^V$.

Um politopo é integral se todos os seus pontos extremos são integrais. Um poliedro $P \subseteq \mathbb{R}_+^V$ é integral se todos os seus pontos extremos são integrais.

Teorema 11.2. Seja $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}^V$ um politopo racional, então P é integral $\iff \forall w \in \mathbb{Z}^V$ temos que $\max_{x \in P} w^T x \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. ($\implies$) Seja $w \in \mathbb{Z}^V$. Pelo teorema Fundamental da Programação Linear,

tem solução ótima e existe solução ótima $\bar{x} \in X$ pelo (10.5). Logo, $\max_{x \in P} w^T x = w^T \bar{x} \in \mathbb{Z}$.

($\impliedby$) Seja $\bar{x} \in X$. Pelo (11.1), $\exists w \in \mathbb{Z}^V$ tal que $\{\bar{x}\} = \operatorname{argmax}_{x \in P} w^T x$. Seja $\bar{w} \in \mathbb{Z}^v$ um múltiplo escalar positivo de w tal que para todo $(\bar{y}, i) \in (X \setminus \{\bar{x}\}) \times V$, vale que:

$$\bar{w}^T \bar{x} > \bar{w}^T \bar{y} + \bar{y}_i - \bar{x}_i \quad (\Delta)$$

Sabemos que tal $\bar{w}$ existe pois $(X \setminus \{\bar{x}\}) \times V$ é finito. Seja $i \in V$. $\tilde{w} := \bar{w} + e_i$. Pelo (10.5) e (Δ) , $\bar{x}$ é uma solução ótima para $(P\tilde{w})$. Então $\bar{x}_i = \tilde{w}^T \bar{x} - \bar{w}^T \bar{x} \in \mathbb{Z}$

□

Seja $A \in \mathbb{R}^{U \times V}$. Dizemos que A é totalmente unimodular (TUM) se $\forall S \subseteq U, \forall T \subseteq V, |S| = |T| \implies \det(A[S, T]) \in \{0, \pm 1\}$.

Teorema 11.3. (Hoffman-Kruskal) Seja $A \in \mathbb{Z}^{U \times V}$ uma matriz. Então $\forall b \in \mathbb{Z}^U$, o poliedro $\{x \in \mathbb{R}_+^V : Ax \leq b\}$ é integral $\iff A$ é (TUM).

Teorema 11.4. Seja $G = (V, E, \phi)$ um grafo (U, W) -bipartido. Então B_G é (TUM).

Demonstração. Sejam $S \subseteq V$ e $T \subseteq E$ tal que $|S| = |T|$, $\det(B_G[S, T]) \notin \{0, \pm 1\}$ e tal que $|S|$ é mínimo. Então $|S| \geq 2$. Se alguma coluna de $B_G[S, T]$ é nula, então $\det(B_G[S, T]) = 0$, contradição.

Se alguma coluna de $B_G[S, T]$ possui um único 1 e as demais entradas são zero, então por expansão de Laplace, para certos $S' \subseteq S$ e $T' \subseteq T$ com $|S'| = |T'| = |S| - 1$ temos $\det(B_G[S, T]) \in \{\pm \det(B_G[S', T'])\} \subseteq \{0, \pm 1\}$, contradição.

Logo toda coluna de $B_G[S, T]$ tem exatamente dois 1's. Então $B_G[S, T]^T (\mathbb{1}_{S \cap U} - \mathbb{1}_{S \cap W}) = 0$. Sabemos isso pois G é bipartido e a incidência de ambos os lados é igual. Portanto $\det(B_G[S, T]) = 0$, contradição.

□

12. AULA DE TERÇA FEIRA, 25 DE SETEMBRO

Corolário 12.1. Se $G = (V, E, \varphi)$ é (U, W) -bipartido, então:

$$P_{emp}(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^E : B_G x \leq \mathbb{1}\}$$

Demonstração.

($\subseteq$) É evidente.

($\supseteq$) Seja $Q = \{x \in \mathbb{R}_+^E : B_G x \leq \mathbb{1}\}$. Como $Q \subseteq [0, 1]^E$, Q é um politopo pelo Teorema (10.3).

Portanto, pelo Teorema (10.4), $Q = \text{conv}(X)$, em que X é o conjunto dos pontos extremos de Q .

Pelo Teorema (11.4), $X \subseteq \mathbb{Z}^E$ e, portanto, $X \subseteq \{0, 1\}^E$. É trivial que se $x \in \{0, 1\}^E$ satisfaz $B_G x \leq \mathbb{1}$, então x é vetor de incidência de um emparelhamento de G .

Logo, $Q = \text{conv}(X) \subseteq \text{conv}(\{\mathbb{1}_M : M \subseteq E \text{ é emparelhamento em } G\}) = P_{emp}(G)$. $\square$

Seja $D = (V, A, \varphi)$ um digrafo. A matriz de incidência de D é a matriz $B_D \in \{0, \pm 1\}^{V \times A}$ dada por:

$$B_D(v, a) := [a \in \delta^{IN}(v)] - [a \in \delta^{OUT}(v)] \quad \forall (v, a) \in V \times A$$

Exercício 12.2. Seja $D = (V, A, \varphi)$ um digrafo. Prove que:

$$B_D = \sum_{\substack{a \in A \\ \varphi(a) = uv}} (e_v - e_u) e_a^T$$

Seja $W = \langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k \rangle$ um passeio de r a s em D . Denote:

$$x_W := \sum_{i=1}^K e_{a_i} \in \mathbb{R}^A$$

Temos:

$$\begin{aligned} B_D \cdot x_W &= \sum_{\substack{a \in A \\ \varphi(a) = uv}} (e_v - e_u) e_a^T \cdot \sum_{i=1}^K e_{a_i} \\ &= \sum_{i=1}^K \sum_{\substack{a \in A \\ \varphi(a) = uv}} (e_v - e_u) e_a^T \cdot e_{a_i} \\ &= \sum_{i=1}^K (e_v - e_u) = e_{v_k} - e_{v_0} = e_s - e_r \end{aligned}$$

Sejam $D = (V, A, \varphi)$ um digrafo, $r, s \in V$ e $l : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Considere o PL:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && l^T x \\ &\text{sujeito a} && B_D x = e_s - e_r \\ &&& x \in \mathbb{R}_+^A \end{aligned} \tag{P}$$

Qualquer passeio W de r a s em D fornece uma solução viável x_W com valor objetivo $l^T x_W = l(W)$. Seu dual é:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && y_s - y_r \\ &\text{sujeito a} && B_D^T y \leq l \\ &&& y \in \mathbb{R}^V \end{aligned} \tag{D}$$

Exercício 12.3. No contexto dos PLs (P) e (D) acima, prove que:

- (1) Se não há passeio de r a s em D e (D) é viável, então (P) é ilimitado.
- (2) A região viável de (P) é um poliedro integral.

Observe que uma restrição de (P) para $v \in V$ tem a forma:

$$e_v^T B_D x = [v = s] - [v = r] \iff x(\delta^{IN}(v)) - x(\delta^{OUT}(v)) = [v = s] - [v = r]$$

13. AULA DE QUINTA FEIRA, 27 DE SETEMBRO

Sejam $D = (V, A, \varphi)$ um grafo e $r, s \in V$ distintos.

Um (r,s) -fluxo em D é um vetor $x \in \mathbb{R}_+^A$ tal que $B_D x \in \mathbb{R}_+(e_s - e_r)$.

O valor de um (r,s) -fluxo x é o real $\Phi \in \mathbb{R}_+$ tal que $B_D x = \Phi(e_s - e_r)$.

Dado um vetor $u \in [0, +\infty]^A$ de "capacidades", um (r,s) -fluxo é viável (com relação a u) se $x \leq u$.

Problema do Fluxo Máximo

Dados: um digrafo $D = (V, A, \psi)$, $r, s \in V$ distintos e $u \in [0, +\infty]^A$

Resolva o PL:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \Psi \\ \text{s. a} \quad & B_D x = \Psi(e_s - e_r) \\ & x \in \mathbb{R}_+^A \\ & x \leq u, \Psi \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (MF_{D,(r,s),u})$$

Problema do Fluxo de custo mínimo

Dados: $D = (V, A, \psi)$ um digrafo, $r, s \in V$ distintos, $u \in [0, +\infty]^A$, $k \in \mathbb{R}^A$ (k de "kusto"), $\Psi \in \mathbb{R}_+$

Resolva o PL:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & k^T x \\ \text{s. a} \quad & B_D x = \Psi(e_s - e_r) \\ & x \in \mathbb{R}_+^A \\ & x \leq u \end{aligned} \quad (MCF_{D,(r,s),u,\Psi,k})$$

Seja $D = (V, A, \psi)$ um digrafo, Para cada $x \in \mathbb{R}^A$, denote $excess_x := B_D x \in \mathbb{R}^V$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}_+^A$ é um b-transporte se $excess_x = b$. Um 0-transporte, é uma circulação.

Problema do transporte capacitado

Dados: $D = (V, A, \psi)$ um digrafo, $b \in \mathbb{R}^V$, $u \in [0, +\infty]^A$, $k \in \mathbb{R}^A$

Resolva o PL:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & k^T x \\ \text{s. a} \quad & B_D x = b \\ & x \in \mathbb{R}_+^A \\ & x \leq u \end{aligned} \quad (TD_{b,u,k})$$

Problema da circulação de custo mínimo

Dados: digrafo $D = (V, A, \psi)$, $l \in [-\infty, +\infty]^A$, $u \in (-\infty, +\infty]^A$, $k \in \mathbb{R}^A$ (Queremos $l \leq u$ se não é inviável).

Resolva o PL:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & k^T x \\ \text{s. a} \quad & B_D x = 0 \\ & x \in \mathbb{R}^A \\ & l \leq x \leq u \end{aligned} \quad (MCC_{D,l,u,k})$$

Encontrar uma solução viável do $(MCF_{D,(r,s),u,\Psi,k})$ se reduz a encontrar uma solução do $(MF_{D,(r,s),u})$.

Sabemos que $(MCF_{D,(r,s),u,\Psi,k})$ se reduz a $(TD_{b,u,k})$ e que $(TD_{b,u,k})$ se reduz a $(MCF_{D,(r,s),u,\Psi,k})$.

Também podemos perceber que $(MF_{D,(r,s),u})$ e $(MCF_{D,(r,s),u,\Psi,k})$ se reduzem a $(MCC_{D,l,u,k})$.

Exercício: Reduzir $(MCC_{D,l,u,k})$ para $(TD_{b,u,k})$ (Veja que podemos reduzir $(MCC_{D,l,u,k})$ para ele mesmo com $l \in \mathbb{R}^A$).

14. AULA DE TERÇA FEIRA, 2 DE OUTUBRO

Vamos projetar um algoritmo para $(MCC_{D,l,u,k})$ com $l \in \mathbb{R}_+^A$.

Para um par ordenado vw , denote $vw^1 := vw$ e $vw^{-1} := wv$.

Seja $D = (V, A, \psi)$ um digrafo. Defina $D^+ := (V, A \times \{\pm 1\}, \psi_+)$ onde $\psi_+(a, \beta) := \psi(a)^\beta \forall (a, \beta) \in A \times \{\pm 1\}$.

Note que $B_{D^+} = [B_D] - B_D$.

Seja $W = \langle v_0, (a_1, \beta_1), v_1, \dots, (a_k, \beta_k), v_k \rangle$ um passeio de r a s em D^+ . Denote:

$$x_w := \sum_{i=1}^k \beta_i e_{a_i} \in \mathbb{R}^A$$

Temos também que (Lembrando que $e_a^T e_{a_i} = [a = a_i]$):

$$B_D x_W = \sum_{a \in A, vw := \psi(a)} (e_v - e_u) e_a^T \sum_{i=1}^k \beta_i e_{a_i} = \sum_{i=1}^k \beta_i (e_v - e_u) = \sum_{i=1}^k (e_{v_i} - e_{v_{i-1}}) = e_s - e_r$$

Sejam $l \in \mathbb{R}_+^A$ e $u \in [0, +\infty]^A$ tal que $l \leq u$. Seja $x \in \mathbb{R}_+^A$ tal que $l \leq x \leq u$. Defina o subdigrafo gerador D_x de D^+ com conjunto de arcos:

$$A(D_x) = \{(a, +1) : a \in A, x_a < u_a\} \cup \{(a, -1) : a \in A, l_a < x_a\}$$

D_x é chamado digrafo residual de D (com relação a l, x, u).

Proposição 14.1. Seja $D = (V, A, \psi)$ um digrafo e seja $x \in \mathbb{R}_+^A$ uma circulação. Se $x \neq 0$, então existe um circuito C e D tal que $A(C) \subseteq \text{supp}(x)$. Denote $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, o suporte de f é $\text{supp}(x) := \{s \in S : f(s) \neq 0\}$.

Demonstração. Seja $X := \text{supp}(x)$ e seja $P = \langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k \rangle$ um caminho de comprimento máximo em $(V, X, \psi|_X)$. Como $x \neq 0$, temos $k \geq 1$. Temos $0 < x(a_k) \leq x(\delta^{in}(v_k)) = x(\delta^{out}(v_k))$. Logo, existe um arco $a \in \delta^{out}(v_k)$ com $x_a > 0$. Seja $w \in V$ tal que $\psi(a) = v_k w$, Então $w \in V(P)$. Pela escolha de P . Logo $(V, X, \psi|_X)$ contém um circuito. $\square$

15. AULA DE QUINTA FEIRA, 4 DE OUTUBRO

Teorema 15.1. (Decomposição de circulações) Sejam $D = (V, A, \psi)$ um digrafo e $x \in \mathbb{R}_+^A$. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos circuitos de D . Então: x é uma circulação $\iff x \in \text{cone}(\{\mathbb{1}_{A(C)} : C \in \mathcal{C}\})$.

$\text{cone}(S) := \{\sum_{s \in S} \alpha_s s : \alpha \in \mathbb{R}_+^S\}$ Sendo $S \subseteq \mathbb{R}^V$ finito. Combinações lineares do tipo contido no somatório (i.e, coeficientes maiores ou iguais a 0) são chamadas de combinações cônicas.

Além disso, se x é integral, temos que x é uma circulação $\iff x \in \{\sum_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C \mathbb{1}_{A(C)} : \alpha \in \mathbb{N}_+^{\mathcal{C}}\}$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Segue imediatamente de que se $C \in \mathcal{C}$ então $B_D \mathbb{1}_{A(C)} = B_D x_C = 0$

($\Rightarrow$) Seja α^* uma solução ótima para o PL:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \mathbb{1}^T \alpha \\ \text{s. a} \quad & \alpha \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}} \\ & \sum_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C \mathbb{1}_{A(C)} \leq x \end{aligned} \tag{P}$$

Tome $s := x - \sum_{C \in \mathcal{C}} \alpha_C^* \mathbb{1}_{A(C)} \geq 0$, note que s é circulação.

suponha que $s \neq 0$, pela (14.1), sabemos que $\exists C \in \mathcal{C}$ tal que $A(C) \subseteq \text{supp}(s)$. Tome $\varepsilon := \min_{a \in A(C)} s_a$, então $\varepsilon \mathbb{1}_{A(C)} \leq s$. Portanto $\alpha^* + \varepsilon e_C$ é viável em (P) com valor objetivo $\mathbb{1}^T \alpha^* + \varepsilon > \mathbb{1}^T \alpha^*$. Contradição. Portanto $s = 0$. $\square$

Teorema 15.2. Sejam $D = (V, A, \psi)$ um digrafo, $l \in [0, +\infty)^A$, $u \in [0, +\infty)^A$, $k \in \mathbb{R}^A$. Seja $x \in \mathbb{R}^A$ uma circulação viável (i.e, $l \leq x \leq u$) e seja $\mathcal{C}_x$ o conjunto de circuitos D_x . Defina $\bar{k} : A(D_x) \rightarrow \mathbb{R}$ como $\bar{k}(a, \beta) := \beta k(a) \forall (a, \beta) \in A(D_x)$. Então x não é uma solução ótima de $(MCC_{D,l,u,k}) \iff \exists C \in \mathcal{C}_x$ tal que $\bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C)} < 0$. Nesse caso, $\bar{x} := x + \varepsilon x_C$ é circulação viável com $k^T \bar{x} = k^T x + \varepsilon \bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C)} < k^T x$ onde $\varepsilon := \min(\{u_a - x_a : (a, +1) \in A(C)\} \cup \{x_a - l_a : (a, -1) \in A(C)\}) > 0$.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Ultima linha do enunciado do teorema

($\Rightarrow$) (Vamos usar a contrapositiva da ($\Rightarrow$)) : Seja y uma circulação viável. Então $d := y - x$ é uma circulação. Defina $\bar{d} \in \mathbb{R}_+^{A(D^+)}$ como:

$$\begin{aligned} \bar{d}(a, 1) &:= \max\{0, d_a\} \forall a \in A \\ \bar{d}(a, -1) &:= \max\{0, -d_a\} \end{aligned}$$

Tome $\tilde{d} := \bar{d}|_{A(D_x)}$, note que $\tilde{d} \geq 0$ e $\bar{d}$ é obtido de $\tilde{d}$ adicionando-se coordenadas nulas. Note que $\tilde{d}$ é circulação em D_x . Logo, existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}_x}$ tal que: $\tilde{d} = \sum_{C \in \mathcal{C}_x} \alpha_C \mathbb{1}_{A(C)}$ pelo (15.1)

Temos que $k^T d = \bar{k}^T \tilde{d} = \sum_{C \in \mathcal{C}_x} \alpha_C \bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C)}$, logo $k^T y \geq k^T x$ $\square$

Corolário 15.3. Sejam $D = (V, A, \psi)$ um digrafo, $l \in [0, +\infty)^A$, $u \in [0, +\infty)^A$ e $k \in \mathbb{R}^A$. Suponha que l é integral e que cada coordenada finita de u é um inteiro. Se existe solução ótima para $(MCC_{D,l,u,k})$, então existe uma solução ótima para $(MCC_{D,l,u,k})$ que é integral

Demonstração. Exercício. $\square$

Exercício 15.4. Mostre como obter uma solução ótima do dual de $(MCC_{D,l,u,k})$ a partir de um potencial viável para D_x , se x é uma circulação ótima.

16. AULA DE TERÇA FEIRA, 16 DE OUTUBRO

Exercício 16.1. (Decomposição em caminhos) Sejam $D = (V, A, \psi)$ um digrafo, $r, s \in V$ distintos e $x \in \mathbb{R}_+^A$. Sejam $\mathcal{C}$ o conjunto de circuitos de D e $\mathbb{P}$ o conjunto dos caminhos de r a s em D . Prove que x é um (r, s) -fluxo $\iff x \in \text{cone}(\{\mathbb{1}_{A(W)} : W \in \mathcal{C} \cup \mathbb{P}\})$. Além disso, formule e prove um refinamento envolvendo integralidade.

Exercício 16.2. Sejam $D = (V, A, \psi)$ um digrafo, $r, s \in V$ distintos e $u \in [0, +\infty]^A$. Seja $x \in \mathbb{R}_+^A$ um (r, s) -fluxo viável em $(MF_{D,(r,s),u})$ então x é ótimo em $(MF_{D,(r,s),u}) \iff r$ não atinge s em D_x

Corolário 16.3. (Teorema do fluxo máximo e corte mínimo do Ford e Fulkerson) Sejam $D = (V, A, \psi)$ um digrafo $r, s \in V$ distintos e $u \in [0, +\infty]^A$. Então o valor ótimo de $(MF_{D,(r,s),u})$ é igual ao valor ótimo de:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \mathbb{1}_{\delta^{out}(R)}^T u \\ \text{s. a} \quad & R \subseteq V \\ & r \in R \\ & s \notin R \end{aligned} \tag{MinCut}_{D,(r,s),u}$$

Demonstração. Seja $R \subseteq V$ tal que $r \in R$ e $s \notin R$. Tome $S := V \setminus R$. Seja x viável em $(MF_{D,(r,s),u})$ com valor objetivo Ψ . Então:

$$B_D x = \Psi(e_s - e_r) \implies \mathbb{1}_S^T B_D x = \Psi \mathbb{1}_S^T (e_s - e_r) \implies \Psi = \mathbb{1}_{\delta^{out}(R)}^T x - \mathbb{1}_{\delta^{in}(R)}^T x \leq \mathbb{1}_{\delta^{out}(R)}^T u \quad (*)$$

Logo valor ótimo de $(MF_{D,(r,s),u})$ é menor ou igual que o valor ótimo de $(MinCut_{D,(r,s),u})$. E se $(MF_{D,(r,s),u})$ é ilimitado, temos $\mathbb{1}_{\delta^{out}(R)}^T u = +\infty$ para todo $R \subseteq V \setminus \{s\}$ com $r \in R$.

Suponha então que x^* é solução ótima para $(MF_{D,(r,s),u})$. Tome $R := \{v \in V : r \rightsquigarrow_{D_x} v\}$ e $S := V \setminus R$. Temos $r \in R$ e $s \in S$ pelo (16.2). Se $a \in \delta^{out}(R)$, então $(a, +1) \notin A(D_{x^*})$ e portanto $x_a^* = u_a$. Se $a \in \delta^{in}(R)$, então $(a, -1) \notin A(D_{x^*})$ e portanto $x_a^* = 0$. Logo por (*), $\Psi^* = \mathbb{1}_{\delta^{out}(R)}^T x^* - \mathbb{1}_{\delta^{in}(R)}^T x^* = \mathbb{1}_{\delta^{out}(R)}^T u \quad \square$

O Método Húngaro

Seja $G = (V, E)$ um grafo (U, W) -bipartido e $c \in \mathbb{R}^E$. O problema do emparelhamento perfeito de custo mínimo pode ser formulado como

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T x \\ \text{s. a} \quad & \mathbb{1}_{\delta(v)}^T x = 1 \quad \forall v \in V \\ & x \in \mathbb{R}_+^E \end{aligned} \tag{P}$$

Temos que seu dual é:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \mathbb{1}^T y \\ \text{s. a} \quad & y_u + y_v \leq c_{uv} \quad \forall uv \in E \end{aligned} \tag{D}$$

folgas complementares:

$$x_{uv} > 0 \implies y_u + y_v = c_{uv} \quad \forall uv \in E$$

17. AULA DE QUINTA FEIRA, 18 DE OUTUBRO

Teorema 17.1. (O método do húngaro) Sejam $G = (V, E, \psi)$ um grafo (U, W) -bipartido e $c \in \mathbb{R}^E$. Para qualquer solução viável y de:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \mathbb{1}^T y \\ \text{s. a} \quad & B_G^T y \leq c \\ & y \in \mathbb{R}^V \end{aligned} \quad (\text{D})$$

Denote $E^=(y) := \{f \in E : e_f^T B_G^T y = c_f\}$ e $G^=(y) := (V, E^=(y), \psi|_{E^=(y)})$ e, para qualquer emparelhamento $M \subseteq E^=(y)$, denote por $D_M^=(y)$ a orientação de $G^=(y)$ com função de incidência:

$$\begin{aligned} \Psi(e) := \{ & uw \text{ se } \psi(e) = uw, u \in U, w \in W \text{ e } e \notin M \\ & wu \text{ se } \psi(e) = uw, u \in U, w \in W \text{ e } e \in M \end{aligned}$$

e tome $R_M^=(y) := \{v \in V : \exists u \in U \setminus V_M, u \rightsquigarrow_{D_M^=(y)} v\}$. Sejam $\bar{y}$ viável em (D) e $M \subseteq E^=(\bar{y})$ um emparelhamento, então vale exatamente uma das afirmações:

(i) $W \cap R_M^=(\bar{y}) \not\subseteq V_M$ e, para qualquer caminho P de $U \setminus V_M$ a $W \setminus V_M$, $M' := M \Delta E(P)$ é um emparelhamento maior que M tal que $M' \subseteq E^=(\bar{y})$

(ii) $W \cap R_M^=(\bar{y}) \subseteq V_M$ e temos

$$S := U \cap R_M^=(\bar{y})$$

$$T := N_{G^=(\bar{y})}(S), \text{ Sabemos que vale } |S| > |T|$$

e para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++} := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0\}$ tal que

$$\varepsilon \leq \inf \{c_e - \bar{y}_u - \bar{y}_w : \psi(e) = uw, u \in S, w \notin T\} \quad (*)$$

o vetor $\tilde{y}_\varepsilon := \bar{y} + \varepsilon(\mathbb{1}_S - \mathbb{1}_T)$ é viável em (D) e satisfaz $M \subseteq E^=(\tilde{y}_\varepsilon)$ e $R_M^=(\tilde{y}_\varepsilon) \supseteq R_M^=(\bar{y})$

COM INCLUSÃO ESTRITA SE (*) VALE COM IGUALDADE

Demonstração. exercício. □

Problema do Circuito de custo médio mínimo

Dados: um digrafo $D = (V, A, \psi)$, $l : A \rightarrow \mathbb{R}$

Resolva:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \frac{l^T \mathbb{1}_{A(C)}}{|A(C)|} \\ \text{s. a} \quad & C \in \mathcal{C}(D) \end{aligned} \quad (\text{MMCC}_{D,l})$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}$. Então δ é o menor ou igual que o valor ótimo de $(\text{MMCC}_{D,l}) \iff l^T \mathbb{1}_{A(C)} \geq \delta |A(C)| \forall C \in \mathcal{C}(D) \iff (l - \delta \mathbb{1})^T \mathbb{1}_{A(C)} \geq 0 \forall C \in \mathcal{C}(D) \iff D$ não tem circuitos negativos com relação a $l - \delta \mathbb{1} \iff \exists y \in \mathbb{R}^V : l - \delta \mathbb{1} \geq B_D^T y$

Logo, o valor ótimo de $(\text{MMCC}_{D,l})$ é igual ao valor ótimo de:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \delta \\ \text{s. a} \quad & l - \delta \mathbb{1} \geq B_D^T y \\ & y \in \mathbb{R}^V \\ & \delta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e para o valor ótimo δ^* e qualquer solução ótima $C \in \mathcal{C}$ de $(\text{MMCC}_{D,l})$, vale $(l - \delta^* \mathbb{1})^T \mathbb{1}_{A(C)} = 0$.

Para $k \in \mathbb{N}$ e $v \in V$, defina como $d_K(v)$ o valor ótimo de:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & l^T x_w \\ \text{s. a} \quad & W \text{ é passeio em } D \text{ com exatamente } k \text{ arcos e que termina em } v \end{aligned} \quad (\text{MW}_{D,k,v})$$

Note que:

$$d_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ \inf_{a \in \delta^{in}(v) \text{ e } \psi(a)=uv} \{d_{k-1}(u) + l(a)\} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

Teorema 17.2. (Karp) Seja $D = (V, A, \psi)$ um digrafo e $l : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Tome $n := |V|$. Então o valor ótimo de ($MMCC_{D,l}$) é igual a:

$$\min_{v \in V} \{ \max \{ \frac{d_n(v) - d_k(v)}{n - k} \} \} \quad (*)$$

Dado que $0 \leq k < n$ e $d_k(v) < \infty$

Demonstração. Podemos supor que $d_k(v) < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $v \in V$ (exercício). Seja δ^* o valor ótimo de ($MMCC_{D,l}$).

Suponha que v atinge o mínimo em (*). Seja W_n uma solução ótima para $(MW_{D,n,v})$. Então W_n pode ser decomposto num passeio W_k com $k < n$ arcos que termina em v e um circuito C com $n - k$ arcos. Logo, $d_n(v) = l^T x_{w_n} = l^T x_{w_k} + l^T \mathbb{1}_{A(C)} \geq d_k(v) + \delta^*(n - k)$

Portanto sabemos que $\delta^* \leq \frac{d_n(v) - d_k(v)}{n - k}$. Agora vamos provar que $\delta^* \geq \frac{d_n(v) - d_k(v)}{n - k}$.

Seja δ^* uma solução ótima para:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \delta \\ \text{s. a } & l - \delta \mathbb{1} \geq B_D^T y \\ & y \in \mathbb{R}^V \\ & \delta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Seja $C = \langle v_0, a_1, v_1, \dots, a_t, v_t \rangle$ um circuito em D tal que $(l - \delta^* \mathbb{1})^T \mathbb{1}_{A(C)} = 0$. Defina também $\tilde{l} := (l - \delta^* \mathbb{1})$.

Denote por $\tilde{d}$ a função d com $\tilde{l}$ no lugar de l . Como todo circuito tem custo maior ou igual a 0 com relação a $\tilde{l}$, $\min_{r \in \mathbb{N}} \tilde{d}_r(v_0)$ é atingido por algum r^* tal que $0 \leq r^* < n$. Adicionando-se cópias de C ao fim de um passeio ótimo que termina em v_0 , podemos supor que $n - t \leq r^* < n$. Tome $v := v_n - r^*$ e decompondo C em passeios:

$P := \langle v_0, a_1, v_1, \dots, v_{n-r^*} \rangle$ passeio de v_0 a v com $n - r^*$ arcos

$Q := \langle v_{n-r^*}, \dots, a_t, v_t \rangle$ passeio de v a v_t com $t - (n - r^*)$ arcos

Então $\tilde{d}_n(v) \leq \tilde{d}_{r^*}(v_0) + \tilde{l}^T \mathbb{1}_{A(P)}$ e para todo $k \in \{0, \dots, n - 1\}$, sabemos que:

$$\tilde{d}_k(v) + \tilde{l}^T \mathbb{1}_{A(Q)} \geq \tilde{d}_{k+(t-(n-r^*))}(v_0) \geq \tilde{d}_{r^*}(v_0) \geq \tilde{d}_n(v) - \tilde{l}^T \mathbb{1}_{A(P)}$$

Portanto sabemos que $\tilde{d}_n(v) - \tilde{d}_k(v) \leq \tilde{l}^T \mathbb{1}_{A(C)} = 0$, o que nos diz que $\tilde{d}_n(v) - \tilde{d}_k(v) \leq \delta^*(n - k)$ como queríamos concluir. $\square$

18. AULA DE TERÇA FEIRA, 23 DE OUTUBRO

Teorema 18.1. (Goldberg e Tarjan, 1988) Sejam $D = (V, A, \varphi)$ um digrafo, $l \in \mathbb{R}_+^A$, $u \in [0, +\infty]^A$ tal que $l \leq u$ e $k \in \mathbb{R}^A$. Defina $\bar{k} : A \times \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\bar{k}(a, \beta) := \beta k(a) \forall (a, \beta) \in A \times \{\pm 1\}$. Seja $T \in \mathbb{N}$ e sejam $x_0, \dots, x_T$ circulações viáveis (isto é, $l \leq x_t \leq u \forall t$) com as seguintes propriedades:

Para cada $t \in \{0, \dots, T-1\}$, denote por $\mathcal{C}_t$ o conjunto de circuitos de D_{x_t} e suponha que, para alguma solução ótima C_t de:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{\bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C_t)}}{|A(C_t)|} \\ \text{s. a} \quad & C_t \in \mathcal{C}_t \end{aligned} \quad (MMCC_t)$$

Com o valor objetivo negativo, temos $x_{t+1} = x_t + \varepsilon_t x_{C_t}$ onde $\varepsilon_t > 0$ é máximo tal que $l \leq x_{t+1} \leq u$. Então, para $n := |V|$ e $m := |A|$, temos $T \leq 4nm^2 \lceil \ln(n) \rceil$.

Demonstração. Para cada $t \in \{0, \dots, T-1\}$, denote $D_t := D_{x_t}$ e $A_t := A(D_t)$ e seja (y_t, δ_t) uma solução ótima de:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \delta \\ \text{s. a} \quad & \bar{k} \upharpoonright_{A_t} + \delta \mathbb{1} \geq B_{D_t}^T y \\ & y \in \mathbb{R}^V \\ & \delta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (MMCC'_t)$$

de modo que $\bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C_t)} = -\delta_t |A(C_t)|$ e $\bar{k} \upharpoonright_{A_t} + \delta_t \mathbb{1} \geq B_{D_t}^T y_t$

(i) $\delta_{t+1} \leq \delta_t$ para todo $t \in \{0, \dots, T-1\}$

Seja $t \in \{0, \dots, T-1\}$, temos $A_{t+1} \subseteq A_t \cup \{(a, -\beta) : (a, \beta) \in A(C_t)\}$ e $\bar{k} \upharpoonright_{A_t} - B_{D_t}^T y_t \geq -\delta_t \mathbb{1}$, com igualdade em todo componente de $A(C_t)$

Se $(a, -\beta) \in A_{t+1}$ e $(a, \beta) \in A(C_t)$

então $(\bar{k} \upharpoonright_{A_{t+1}} - B_{D_{t+1}}^T y_t)(a, -\beta) = (\bar{k} \upharpoonright_{A_t} - B_{D_t}^T y_t)(a, \beta) = \delta_t > 0 > -\delta_t$

portanto (y_t, δ_t) é viável em $(MMCC'_{t+1})$.

(ii) se $t \in \mathbb{N}$ tal que $t+m < T$, então $\delta_{t+m} \leq (1 - \frac{1}{n})\delta_t$. Seja $t \in \mathbb{N}$ como em (ii), Defina:

$$\begin{aligned} \bar{k}_t &:= \bar{k} - B_{D^+}^T y_t \\ \bar{k}_t \upharpoonright_{A_t} &\geq -\delta_t \mathbb{1} \end{aligned}$$

Existe um arco (a, β) em um dos circuitos $C_t, \dots, C_{t+m-1}$ tal que $\bar{k}_t(a, \beta) \geq 0$. Caso contrário, cada $A_{\tau+1}$ é obtido a partir de A_τ removendo-se algum arco de $\bar{k}_t$ -custo negativo e adicionando-se apenas arcos de $\bar{k}_t$ -custo positivo:

Se (a, β) é um arco de v a w em $A(C_\tau)$ tal que $0 > \bar{k}_t(a, \beta) = \bar{k}(a, \beta) - e_{(a, \beta)}^T B_{D^+}^T y_t$ então o arco $(a, -\beta)$ de w a v adicionado a A_τ satisfaz:

$$\bar{k}_t(a, -\beta) = -\bar{k}_t(a, \beta) > 0$$

Logo, $(y_t, 0)$ é viável em $(MMCC'_{t+m})$ (contradição, pois $\delta_{t+m} > 0$)

Seja $\tau \in \{t, \dots, t+m-1\}$ mínimo tal que $\exists (\bar{a}, \bar{\beta}) \in A(C_\tau)$ tal que $\bar{k}_t(\bar{a}, \bar{\beta}) \geq 0$. Como τ é mínimo, todo arco (a, β) de $A(C_\tau)$ com $\bar{k}_t(a, \beta) < 0$ está em A_t e portanto $\bar{k}_t(a, \beta) \geq -\delta_t$

$$\bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C_\tau)} = \bar{k}_t^T \mathbb{1}_{A(C_\tau)} + y_t^T (B_{D^+} \mathbb{1}_{A(C_\tau)}) \geq (|A(C_\tau)| - 1)(-\delta_t)$$

e, portanto podemos concluir:

$$\delta_{t+m} \leq \delta_\tau = \frac{\bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C_\tau)}}{|A(C_\tau)|} \leq (1 - \frac{1}{|A(C_\tau)|})\delta_t \leq (1 - \frac{1}{n})\delta_t$$

Logo temos que (ii) vale.

(iii) Para $\Delta t := 2nm \lceil \ln(n) \rceil$, temos $\delta_{t+\Delta t} < \delta_t/2n$ para todo $t \in \mathbb{N}$ tal que $t + \Delta t < T$

Temos por (ii) que:

$$\delta_{t+\Delta t} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n \lceil \ln(n) \rceil} \delta_t \leq e^{-2 \ln(n)} \delta_t = \frac{1}{n^2} \delta_t \leq \frac{1}{2n} \delta_t$$

(iv) Para cada $t \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{t} := t + \Delta t < T$, existe $(\bar{a}, \bar{\beta}) \in A(C_t)$ tal que, para todo $t + \Delta t \leq \tau < T$, temos $(\bar{a}, \bar{\beta}) \notin A(C_\tau)$

Defina $\bar{k}_{\bar{t}} := \bar{k} - B_{D^+}^T y_{\bar{t}}$. Temos $\bar{k}_{\bar{t}}^T \mathbb{1}_{A(C_t)} = \bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C_t)} = -\delta_t |A(C_t)|$. Portanto existe $(\bar{a}, \bar{\beta}) \in A(C_t)$ tal que:

$$\bar{k}_{\bar{t}}(\bar{a}, \bar{\beta}) \leq -\delta_t < -2n\delta_{\bar{t}} \tag{*}$$

Suponha que existe $\tau \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{t} < \tau < T$ tal que $x_\tau(\bar{a}) \neq x_{\bar{t}}(\bar{a})$. Logo temos que:

$$(*) \implies \bar{k}_{\bar{t}}(\bar{a}, \bar{\beta}) < -2n\delta_{\bar{t}} \leq -\delta_{\bar{t}} \implies (\bar{a}, \bar{\beta}) \notin A_{\bar{t}}$$

Suponha $\beta = 1$ (O outro caso é análogo), portanto $x_\tau(\bar{a}) < u(\bar{a})$. Pelo teorema de decomposição de circulações (15.1) aplicado a $x_{\bar{t}} - x_\tau$ temos que A_τ possui um circuito $C \in \mathcal{C}_\tau$ tal que $(\bar{a}, \bar{\beta}) \in A(C)$ (Análise o suporte de $x_{\bar{t}} - x_\tau$) e $\{(a, -\beta) : (a, \beta) \in A(C)\} \subseteq A_{\bar{t}}$ temos também que $\bar{k}_{\bar{t}}(\bar{a}, -\bar{\beta}) \geq -\delta_{\bar{t}} \forall (a, \beta) \in A(C) \iff \bar{k}_{\bar{t}}(a, \beta) \leq \delta_{\bar{t}}$. Portanto sabemos que:

$$\bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C)} = \bar{k}_{\bar{t}} \mathbb{1}_{A(C)} = \bar{k}_{\bar{t}}(\bar{a}, \bar{\beta}) + \bar{k}_{\bar{t}}^T (\mathbb{1}_{A(C)} - e_{(\bar{a}, \bar{\beta})}) < (-2n + |A(C)| - 1)\delta_{\bar{t}} \leq -\delta_\tau |A(C)|$$

portanto temos que

$$\frac{\bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C_\tau)}}{|A(C_\tau)|} = -\delta_\tau > \frac{\bar{k}^T \mathbb{1}_{A(C)}}{|A(C)|}$$

□

19. AULA DE TERÇA FEIRA, 30 DE OUTUBRO

Discussão sobre a prova 2 e dúvidas

20. AULA DE QUINTA FEIRA, 1 DE NOVEMBRO

Término do (17.2) e (18.1).

21. AULA DE TERÇA FEIRA, 6 DE NOVEMBRO

Um grafo G é hipo-emparelhável se G possui vertices e, para cada $v \in V(G)$, o grafo $G - v$ tem um emparelhamento perfeito. Cada tal emparelhamento é um emparelhamento quase-perfeito de G .

Lembre-se que um vértice v de um grafo G é essencial (em G) se $\nu(G - v) < \nu(G)$ [Isto é, todo emparelhamento máximo de G cobre v].

Lema 21.1. Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo sem vertices essenciais, defina uma relação $\sim$ sobre V como $u \sim v$ se $u = v$ ou ($u \neq v$ e nenhum emparelhamento máximo de G expõe ambos u e v). Então $\sim$ é uma relação de equivalência.

Demonstração. Questão 4 da P1. □

Lema 21.2. (Lema de Gallai) Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo conexo. Se G não tem vertices essenciais então G é hipo-emparelhável.

Demonstração. Defina a relação $\sim$ como no (21.1). Por tal lema, $\sim$ é uma relação de equivalência. Note que, se $u, v \in V$ são adjacentes, então $u \sim v$: se algum emparelhamento M expõe ambos u e v , então $M \cup \{e\}$, onde $e \in E$ com $\varphi(e) = uv$, é um emparelhamento e portanto M não é máximo. Como G é conexo $\sim$ tem uma única classe de equivalência V . Seja $u \in V$, como u não é essencial, existe um emparelhamento máximo que expõe u . Seja $v \in V$, com $v \neq u$. Então $u \sim v$ e portanto M não expõe v . Logo, $V \setminus \{u\} \subseteq V_M$ e portanto $V \setminus \{u\} = V_M$ □

Denote $O(G) :=$ conjunto de componentes de G com número ímpar de vértices. Sendo $G = (V, E, \varphi)$ e $odd(G) := |O(G)|$.

Teorema 21.3. (Fórmula de Tutte-Berge) Se G é um grafo, então:

$$\nu(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left(\frac{1}{2} [|V(G)| - (odd(G - S) - |S|)] \right)$$

Demonstração. Seja $G = (V, E, \varphi)$ e $n := |V|$. Vamos provar as duas desigualdades $\geq$ e $\leq$.

($\leq$). Seja $M \subseteq E$ um emparelhamento e $S \subseteq V$ defina $O' := \{C \in O(G - S) : V(C) \subseteq V_M\}$. Se $C \in O'$ e $U := V(C)$, então $\delta_G(U) \cap M \neq \emptyset$ (exercício: prove!) e portanto algum vértice de C está emparelhado por M a algum vértice de S . Portanto existe uma injeção $\pi : O' \rightarrow S$. Como cada elemento de $O(G - S) \setminus O'$ tem algum vértice exposto por M , temos $|V \setminus V_M| \geq |O(G - S) \setminus O'| = odd(G - S) - |O'| \geq odd(G - S) - |S|$. Portanto $n - 2|M| \geq odd(G - S) - |S|$

($\geq$). Seja $S \subseteq V$ maximal tal que $\nu(G - S) = \nu(G) - |S|$, um tal S existe $S = \emptyset$ é uma possibilidade.

Afirmção: todo vértice de $G - S$ é não essencial em $G - S$.

prova: Se $u \in V(G - S)$ é essencial (em $G - S$) então $\nu(G - S - u) = \nu(G - S) - 1 = \nu(G) - |S| - 1 = \nu(G) - |S \cup \{u\}|$. Logo a afirmação vale.

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos componentes de $G - S$, então:

$$\textcircled{i} \nu(G - S) = \sum_{C \in \mathcal{C}} \nu(C)$$

$\textcircled{ii}$ para cada $C \in \mathcal{C}$, todo vértice de C é não essencial em C .

Pelo lema de Gallai, todo $C \in \mathcal{C}$ é hipo-emparelhável. Logo:

$$\nu(G) = |S| + \nu(G - S) = |S| + \sum_{C \in \mathcal{C}} \nu(C) = |S| + \frac{1}{2} \sum_{C \in \mathcal{C}} (|V(C)| - 1) = \frac{1}{2} (n + |S| - odd(G - S))$$

□

Corolário 21.4. (Teorema do emparelhamento de Tutte) Um grafo G tem emparelhamento perfeito $\iff \forall S \subseteq V(G)$, vale $odd(G - S) \leq |S|$

22. AULA DE QUINTA FEIRA, 8 DE NOVEMBRO

Alguns resultados e definições da aula a seguir foram refeitos na aula 23. Os resultados e definições que podem ser desconsiderados estão indicados com (DEPRECATED).

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo. Para $S \subseteq V$, denote $N_G(S) := \{v \in V : v \text{ tem vizinho em } S\}$
 Defina também (DEPRECATED):

$$\begin{aligned} D(G) &:= \{v \in V : \nu(G - v) = \nu(G)\} \\ A(G) &:= N_G(D(G)) \\ C(G) &:= V \setminus (D(G) \cup A(G)) \end{aligned}$$

Exercício 22.1. Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo, $M \subseteq E$ um emparelhamento e $S \subseteq V$. Então $|V \setminus V_M| \geq \text{odd}(G - S) - |S|$, e se vale igualdade então M é máximo e todo vértice de S é essencial em G e todo vértice de um componente par de $G - S$ é essencial em G .

“Façam esse exercício” - Marcel

Lema 22.2. Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo e $M \subseteq E$ um emparelhamento. Defina um digrafo $D = (V, A, \psi)$ tomando:

$$A := \{(e, v, f) : \left\{ \begin{array}{l} v \in V_M, e, f \in \delta(v), \\ e \notin M \text{ não é laço e } f \in M \end{array} \right\} \}$$

e, para cada $a = (e, v, f) \in A$, tome $\psi(a) := uv$ onde u é o único elemento de $\varphi(e) \setminus \{v\}$ e $w := M(v)$ (Se M é emparelhamento e $v \in V_M$, denote por $M(v)$ o único vértice u para o qual existe $e \in M$ com $\varphi(e) = uv$).

Redefinição de caminhos M -alternantes

Tome $X := V \setminus V_M$, $V_{\text{even}} := \{v \in V : \text{existe passeio } M\text{-alt de comprimento par de } X \text{ até } v\}$ e $V_{\text{odd}} := \{v \in V : \text{existe passeio } M\text{-alt de comprimento ímpar de } X \text{ até } v\}$

Então (DEPRECATED):

① $V_{\text{even}} = \{v \in V : X \rightsquigarrow_D v\}$

② Se $X \cap V_{\text{odd}} = \emptyset$, então $V_{\text{odd}} = \{M(v) : v \in V_M, X \rightsquigarrow_D v\}$, $|V_{\text{even}}| = |V_{\text{odd}}| + |X|$, e, se existe caminho M -alternante de comprimento par de X até $v \in V$, então $v \in D(G)$.

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo e $M \subseteq E$ um emparelhamento e $W = \langle v_0, e_1, v_1, \dots, e_l, v_l \rangle$ um passeio M -alternante e G com $v_0 \notin V_M$. Dizemos que W é uma M -flor se l é ímpar, $v_0, \dots, v_{l-1}$, são distintos 2 a 2 e $v_l = v_i$ para algum i par. Nesse caso, $B := \{v_i, \dots, v_{l-1}\}$ é o M -blossom associado a W e $M \setminus B := \{e \in M : \varphi(e) \not\subseteq B\}$ é um emparelhamento em $G \setminus B$ de tamanho $|M| - \lfloor \frac{1}{2} |B| \rfloor$.

Lema 22.3. Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo, $M \subseteq E$ um emparelhamento. Tome $X := V \setminus V_M$. Seja $W = \langle v_0, e_1, v_1, \dots, e_l, v_l \rangle$ um passeio M -alternante de X a X e comprimento positivo mínimo. Então ou W é M -aumentador ou $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ é uma M -flor para algum $k \leq l$.

Demonstração. Exercício □

Teorema 22.4. (Algoritmo Blossom de Edmonds - DEPRECATED) Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo e $M \subseteq E$ emparelhamento. Tome $X := V \setminus V_M$, defina V_{even} e V_{odd} como no (22.2). Exatamente uma das alternativas abaixo vale:

① $\exists$ caminho M -aumentador P em G e portanto $M \Delta E(P)$ é emparelhamento em G maior que M .

② Não existe passeio M -alternante de X a X de comprimento positivo, M é máximo e $N_G(V_{\text{even}}) = V_{\text{odd}}$, também sabemos que $O(G - V_{\text{odd}}) = \{G[\{v\}] : v \in V_{\text{even}}\}$ e $\text{odd}(G - V_{\text{odd}}) = |V_{\text{even}}| = |V_{\text{odd}}| + |X|$. Além disso $D(G) = V_{\text{even}}$ e $A(G) = V_{\text{odd}}$

③ $\exists M$ -flor W em G com M -blossom B e $\exists$ emparelhamento N em G/B com $|N| > |M/B|$, e sendo v um vértice arbitrário de B se $B \notin V_N$ ou o único elemento de $\varphi(e) \cap B$ se $B \in V_N$ e $e \in N \cap \delta_{G/B}(B)$, então para algum emparelhamento perfeito N_v de $G[B] - v$, o emparelhamento $N \cup N_v$ em G é maior que M .

④ $\exists M$ -flor W em G com M -blossom B , $N := M/B$ é máximo em $H := G/B$, $B \in D(H)$ e $D(G) = (D(H) \setminus \{B\}) \cup B$ e $A(G) = A(H) =: T$ satisfaz $|V(H) \setminus V_N| = \text{odd}(H - T) - |T| = \text{odd}(G - T) - |T| = |V \setminus V_M|$

23. AULA DE QUINTA FEIRA, 22 DE NOVEMBRO

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo. Seja $\emptyset \neq S \subseteq V$, defina o grafo $G/S := (U, E, \psi)$ onde $U := (V \setminus S) \cup \{s\}$ e

$$\psi(e) := \begin{cases} SS & \text{se } \varphi(e) \subseteq S \\ \varphi(e) & \text{se } \varphi(e) \cap S = \emptyset \\ uS & \text{se } \varphi(e) = uv \text{ com } u \notin S \text{ e } v \in S \end{cases}$$

Teorema 23.1. (Algoritmo Blossom de Edmonds '65 - Segunda vez) Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo e $M \subseteq E$ um emparelhamento em G . Tome $X := V \setminus V_M$. Então vale pelo menos uma das afirmações abaixo:

Ⓘ Não existe passeio M -alternante de X para X de comprimento positivo, M é emparelhamento máximo em G e temos que $N_G(V_{\text{even}}) = V_{\text{odd}}$ e $V_{\text{even}} \cap V_{\text{odd}} = \emptyset$. Além disso cada componente de $G - V_{\text{odd}}$ é par ou tem exatamente um vértice de V_{even} , portanto $\text{odd}(G - V_{\text{odd}}) = |V_{\text{even}}|$ e $|V_{\text{even}}| = |X| + |V_{\text{odd}}|$. Logo $2|M| = |V_M| = |V| - |X| = |V| - (\text{odd}(G - V_{\text{odd}}) - |V_{\text{odd}}|)$.

ⓑ Existe um caminho M -aumentador P em G e portanto $M \Delta E(P)$ é um emparelhamento maior que M .

Ⓒ Existe uma M -flor W em G com M -blossom B , existe um emparelhamento N em G/B maior que M/B e definindo como v um vértice arbitrário de B se $B \notin V_N$ ou o único vértice de $\varphi(e) \cap B$ se $e \in N \cap \delta_{G/B}(B)$, então para um emparelhamento perfeito N_v de $G[B] - v$, o conjunto $N \cup N_v$ é um emparelhamento em G maior que M .

Ⓓ Existe uma M -flor W em G com M -blossom B , então o emparelhamento $N := M/B$ é máximo em $H := G/B$ e, se $T \subseteq V(H)$ é tal que: $|N| = 2|V_N| = |V(H)| - (\text{odd}(H - T) - |T|)$ e então $B \notin T$ e $|M| = 2|V_M| = |V| - (\text{odd}(G - T) - |T|)$.

24. AULA DE TERÇA FEIRA, 27 DE NOVEMBRO

$P_{PM} := \text{conv}\{\mathbb{1}_M : M \subseteq E \text{ e é emparelhamento perfeito de } G\}$

Teorema 24.1. (Edmonds) Se $G = (V, E)$ é um grafo sem laços, então:

$$P_{PM}(G) = x \in \mathbb{R}_+^E : \begin{cases} \mathbb{1}_{\delta(v)}^T x = 1 & \forall v \in V \\ \mathbb{1}_{\delta(C)}^T x \geq 1 & \forall C \subseteq V \text{ } |C| \text{ ímpar} \end{cases}$$

O segundo lado da igualdade é chamado de $P(G)$.

Demonstração. ($\subseteq$): “Fácil”

($\supseteq$): Seja $G = (V, E)$ um grafo para o qual a igualdade é falsa e tal que $|V| + |E|$ é mínimo. Seja $\bar{x}$ um ponto extremo de $P(G)$. Então $|V|$ é par.

Se $\bar{x}_e = e$ para algum $e \in E$, então $G' := G - e$ e $x' = \bar{x}|_{E(G')} \in P(G') = P_{PM}(G')$ e portanto existe um conjunto $\mathcal{M}$ de emparelhamentos perfeitos de G' e $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ com $\mathbb{1}^T \lambda = 1$ tal que $x' = \sum_{M \in \mathcal{M}} \lambda_M \mathbb{1}_M$ e portanto $\bar{x} = \sum_{M \in \mathcal{M}} \lambda_M \mathbb{1}_M \in P_{PM}(G)$

Se $\bar{x}_e = 1$ para alguma outra aresta $e = uv \in E$...

Suponha que $\bar{x}_e \in (0, 1) \forall e \in E$. Então todo vértice tem grau maior igual que 2 e portanto $|E| \geq |V|$ e se $|E| = |V|$, então todo vértice de G tem grau 2. Portanto todo componente de G é circuito par e portanto $\bar{x} \in P_{PM}(G)$. Suponha de agora em diante que $|E| > |V|$. Como $\bar{x}$ é a solução única de um subsistema $A'x = b'$ do sistema $Ax \leq b$ que define $P(G)$, $\bar{x}$ satisfaz pelo menos uma restrição da forma $\mathbb{1}_{\delta(C)}^T x \geq 1$ com igualdade para algum $C \subseteq V$ ímpar tal que $3 \leq |C| \leq |V| - 3$.

Sejam $G' := (G - E[C])/C$ e $G'' := (G - E[\bar{C}])/\bar{C}$ para $\bar{C} := V \setminus C$. Tome $x' := \bar{x}|_{E(G')}$ e $x'' := \bar{x}|_{E(G'')}$

Temos $x' \in P(G')$ e $x'' \in P(G'')$. Logo, existem conjuntos de emparelhamentos perfeitos $\mathcal{M}'$ de G' e $\mathcal{M}''$ de G'' , bem como $\lambda' : \mathcal{M}' \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $\lambda'' : \mathcal{M}'' \rightarrow \mathbb{R}_+$ com $\mathbb{1}^T \lambda' = \mathbb{1}^T \lambda'' = 1$ e $x' = \sum_{M \in \mathcal{M}'} \lambda'_M \mathbb{1}_M$ e $x'' = \sum_{N \in \mathcal{M}''} \lambda''_N \mathbb{1}_N$

Temos que $\bar{x} \in \mathbb{Q}^E$ e portanto $x' \in \mathbb{Q}^{E(G')}$ e $x'' \in \mathbb{Q}^{E(G'')}$ e podemos supor que $\lambda' : \mathcal{M}' \rightarrow \mathbb{Q}_+$ e $\lambda'' : \mathcal{M}'' \rightarrow \mathbb{Q}_+$

Logo, podemos supor que:

$$x' = \frac{1}{|\mathcal{N}'|} \sum_{M \in \mathcal{N}'} \mathbb{1}_M \text{ e } x'' = \frac{1}{|\mathcal{N}''|} \sum_{N \in \mathcal{N}''} \mathbb{1}_N$$

e $|\mathcal{N}'| = |\mathcal{N}''|$. Seja $e \in \delta_G(C)$. Então $|\{M \in \mathcal{N}' : e \in M\}| = |\mathcal{N}'| x'_e = |\mathcal{N}''| x''_e = |\{N \in \mathcal{N}'' : e \in N\}|$

Assim existe uma bijeção $\eta : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}''$ tal que para todo $M \in \mathcal{N}'$, M e $\eta(M)$ tem exatamente uma aresta em comum e portanto $M \cup \eta(M)$ é emparelhamento perfeito de G . Então $\bar{x} = \frac{1}{|\mathcal{N}'|} \sum_{M \in \mathcal{N}'} \mathbb{1}_{M \cup \eta(M)} \in P_{PM}(G)$ portanto $P(G) \subseteq P_{PM}(G)$. Contradição. $\square$

25. AULA DE TERÇA FEIRA, 04 DE DEZEMBRO

Problema da Árvore Geradora (AG) de Peso Máximo.

Dados: um grafo $G = (V, E)$ e pesos $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

Resolva:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & w^T \mathbb{1}_A \\ \text{s. a} \quad & A \subseteq E \\ & (V, A) \text{ é AG de } G \end{aligned} \tag{AGM}$$

Defina $P_{AG}(G) := \text{conv}\{\mathbb{1}_A : A \subseteq E, (V, A) \text{ é AG de } G\}$

Teorema 25.1. (Edmonds) Se $G = (V, E)$ é um grafo sem laços, então:

$$P_{AG}(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^E : \begin{cases} \mathbb{1}_A^T x \leq n - \kappa(A) \quad \forall A \subseteq E \\ \mathbb{1}^T x = n - 1 \end{cases} \} =: Q$$

onde $n := |V|$ e, $\forall A \subseteq E$, $\kappa(A)$ é o número de componentes de (V, A) .

Demonstração. ' $\subseteq$ ': Seja $B \subseteq E$ tal que (V, B) é AG.

Seja $A \subseteq E$, sejam $C_1, \dots, C_{\kappa(A)}$ os (conjuntos de vértices) dos componentes de (V, A) . Temos:

$$\mathbb{1}_A^T \mathbb{1}_B = \sum_{i=1}^{\kappa(A)} |B \cap A[C_i]| \leq \sum_{i=1}^{\kappa(A)} (|C_i| - 1) = n - \kappa(A)$$

Exercício: Complete a prova de ' $\subseteq$ '.

' $\supseteq$ ': Vamos provar que, $\forall w : E \rightarrow \mathbb{R}$, o PL:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & w^T x \\ \text{s. a} \quad & \mathbb{1}_A^T x \leq n - \kappa(A) \\ & \mathbb{1}^T x = n - 1 \\ & x \in \mathbb{R}_+^E \end{aligned} \tag{P}$$

tem como solução ótima $\mathbb{1}_B$, onde B é solução ótima para (AGM). Logo todo ponto extremo de Q tem essa forma. O dual de (P) é:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{A \subseteq E} y_A (n - \kappa(A)) \\ \text{s. a} \quad & y_A \geq 0 \quad \forall A \subseteq E \\ & y_E \in \mathbb{R} \\ & \sum_{A \subseteq E: e \in A} y_A \geq w_e \quad \forall e \in E \end{aligned} \tag{D}$$

Rotule as arestas como $e_1, \dots, e_m$ de modo que $w_{e_1} \geq \dots \geq w_{e_m}$. Defina $F_0 := \emptyset$ e para i de 1 a m :

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{se as pontas de } e_i \text{ estão em componentes distintos de } (V, F_{i-1}) \\ F_{i-1} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

FATO: Para todo $i \in \{0, \dots, m\}$, os componentes de (V, F_i) são os mesmos que os componentes $(V, \{e_1, \dots, e_i\} =: E_i)$ Prova do fato: Exercício.

Tome $B := F_m$. Defina $\bar{y} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ sendo que $\mathcal{P}(E)$ e o "power set" de E .

$$\bar{y}_A := \begin{cases} w_{e_i} - w_{e_{i+1}} & \text{se } A = E_i \text{ com } i \in [m-1] \\ w_{e_m} & \text{se } A = E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Vamos mostrar que $\bar{x} := \mathbb{1}_B$ é viável em (P), $\bar{y}$ é viável em (D) e satisfazem folgas complementares.

Viabilidade de $\bar{x}$: pelo **FATO**, (V, B) é conexo e, por construção, é acíclico, de modo que $\bar{x}$ é viável em (P) pela parte ' $\subseteq$ '.

Viabilidade de $\bar{y}$: Seja $e \in E$. Seja $i \in [m]$ tal que $e = e_i$, Então:

$$\sum_{A \subseteq E: e_i \in A} \bar{y}_A = \sum_{j=1}^m \bar{y}_{E_j} = w_{e_i} = w_e$$

Além disso, $\bar{y}_{E_i} \geq 0 \quad \forall i \in [m-1]$. Logo, $\bar{y}$ é viável em (D).

Folgas complementares: Todas as restrições $\sum_{A \subseteq E: e \in A} y_A \geq w_e$ são satisfeitas com igualdade.

Resta mostrar que, se $\bar{y}_A > 0$ para algum $A \subsetneq E$, então $\mathbb{1}_A^T \bar{x} = n - \kappa(A)$. Para tal A , temos $A = E_i$ para algum $i \in [m-1]$. Então:

$$\mathbb{1}_A^T \bar{x} = \mathbb{1}_{E_i}^T \mathbb{1}_B = |E_i \cap B| = |F_i| = n - \kappa(E_i) = n - \kappa(A)$$

□

APÊNDICE A. NOTAÇÃO

$[n]$	$:=$	$\{1, \dots, n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}_+$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, o conjunto dos reais não negativos
$\arg \min_{x \in X} f(x)$	$:=$	$\{x^* \in X : \forall x \in X, f(x^*) \leq f(x)\}$
$A \Delta B$	$:=$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, a <i>diferença simétrica</i> entre conjuntos A e B
$\mathbb{1}$	$:=$	o vetor formado só por 1's no espaço apropriado
$[P]$	$:=$	$\begin{cases} 1 & \text{se } P \text{ é verdadeiro} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$, sendo P um predicado (Notação de Iverson)

APÊNDICE B. PRODUTOS NOTÁVEIS

$\mathbb{1}_S^T B_D$	$=$	$\delta^{in}(S) - \delta^{out}(S)$ para todo $S \subseteq V$
$B_D \mathbb{1}_C$	$=$	0 se C é um circuito
$B_D \mathbb{1}_P$	$=$	$(e_s - e_r)$ se P é um passeio de r a s
B_D	$=$	$\sum_{a \in A} (e_v - e_u) e_a^T$ Sendo $uv = \varphi(a)$

REFERÊNCIAS

- [1] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank e A. Schrijver. *Combinatorial optimization*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998, páginas x+355.
- [2] A. Schrijver. *Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency*. Volume 24. 3 volumes. Berlin: Springer-Verlag, 2003. xxxviii+1881.